

Рубрика 2. НАУЧНЫЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

Направление – Математическое моделирование

УДК 519.873

DOI 10.17816/transsyst20217146-58

© В. А. Смагин¹, В. П. Бубнов², Ш. Х. Султонов²

¹Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского

²Петербургский государственный университет путей сообщения

Императора Александра I

(Санкт-Петербург, Россия)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОГО КВАНТОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Аннотация. Рассматриваются различные дополнительные математические аспекты, связанные с решением проблемы оптимального в смысле заполнения квантования информации, такие как контроль элементов кванта, учёт ошибок элементов кванта, определение количества информации при квантовании, определение численных значений фракталов распределений, представленных в виде последовательного фрактального распределения. Целью статьи является рассмотрение дополнительных вопросов на основе конкретного «тяжелого» распределения вероятностей – нормального распределения. Рассмотренные вопросы выполнены с целью облегчить решение прикладных задач исследователям, занимающимся проблемой квантования информации.

Ключевые слова: оптимальное квантование информации, квант, ошибка элемента кванта, вероятность, контроль, распределение нормальное и гипердельтное, фрактал.

Rubric 2. SCIENTIFIC AND PRACTICAL DEVELOPMENTS

Field – Math modeling

© Vladimir A. Smagin¹, Vladimir P. Bubnov², Shokhrukh Kh. Sultonov²

¹A.F. Mozhaysky Military Space Academy

²Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University

(St. Petersburg, Russia)

MATHEMATICAL MODELS FOR CALCULATING THE QUANTITATIVE CHARACTERISTICS OF THE OPTIMAL QUANTIZATION OF INFORMATION

Abstract: Various additional mathematical aspects related to solving the problem of optimal information quantization in the sense of filling are considered, such as control of quantum elements, accounting for errors of quantum elements, determining the amount of

information during quantization, and determining the numerical values of fractals of distributions represented as a sequential fractal distribution. The purpose of the article is to consider additional questions based on a specific "heavy" probability distribution – the normal distribution. The considered questions are made in order to facilitate the solution of applied problems for researchers dealing with the problem of information quantization.

Keywords: optimum quantization of the information, quantum, an error of an element of quantum, probability, control, distribution normal and hiperdelta, a fractal.

ВВЕДЕНИЕ

Часть (порция) информации называется квантом. Процесс представления определённого количества информации в виде совокупности квантов называется квантованием информации. Информационные процессы могут сопровождаться своими издержками. Например, при звуковой трансляции текстов, музыки по радио, телевидению временные издержки связаны с необходимостью введения пауз, позволяющих воспринимать их на слух. Письменное представление содержания книги связано с неизбежными издержками на размер шрифта, интервалы между словами, строками. За введение любых издержек, позволяющих улучшить качество восприятия, передачи, хранения информации приходится платить. Минимизировать величину издержек и их стоимость необходимо и в теории информации, особенно в условиях современного информационного бума. По мере увеличения объемов информации, участвующих в процессе хранения, обработки и передачи, растет значимость проблемы оптимального квантования информации.

Первые основополагающие результаты решения класса задач оптимального квантования случайной величины были получены в [1, 2]. В процессе решения практических задач, в которых применяется оптимальное в смысле заполнения квантование информации, разработчику математических моделей систем необходимо рассматривать специфические прикладные вопросы, дополняющие и расширяющие количественные характеристики предложенной математической модели [1]. К таким вопросам можно отнести, например, влияние ошибок на операцию квантования, определение количества используемой информации, учёт контроля элементов квантов, приближённое решение интегрального уравнения, определения плотности вероятности и распределения величины оптимального кванта, нахождение численных значений фракталов распределения. Могут также ставиться и решаться и другие вопросы, не предусмотренные в данной статье [3-8].

ОСНОВНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КВАНТОВАНИЯ

В данной статье используется модель Андропова А.М., Бокоева Т.Н. [1]. Она представляется в следующем виде:

$$\Psi(x) = (x+c) \int_0^{\infty} (E(z/x)+1) dF(z) \quad (1)$$

где $\Psi(x)$ – математическое ожидание квантуемой величины распределения $F(x)$, x – величина кванта, c – величина пробела между квантами, E – наибольшая целая часть числа, заключённого в скобках. Авторы [1] применяют обозначение $M(x) = \Psi(x)$. Целью статьи является рассмотрение дополнительных вопросов на основе конкретного распределения вероятностей – нормального распределения. В качестве примера берётся нормальное распределение со следующими значениями параметров $m=120h$, $\sigma=20h$, $f(x) = dnorm(x, m, \sigma)$ – плотность вероятности, где h является условной единицей времени. Решение (1) представлено в виде графика на Рис. 1. Оптимальная величина кванта, при которой минимальное значение квантованной величины равно $M(31) = 134,139h$.

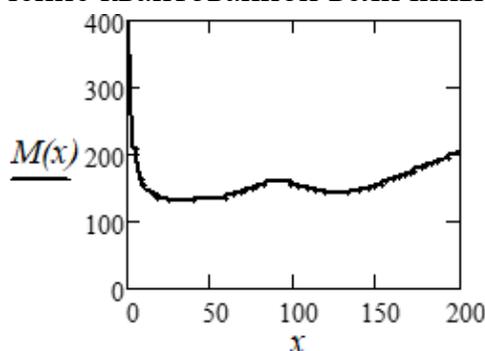


Рис. 1. Зависимость математического ожидания от величины кванта

Рассмотрим указанные во введении вопросы при следующих исходных данных:

нормальное распределение и величина пробела между квантами $m = 120h$, $\sigma = 20h$, $f(x) = dnorm(x, m, \sigma)$; $c = 5h$ вероятность сохранения элемента кванта исправным, $p = 0,95$ затраты времени на восстановление неисправного элемента кванта $\tau = 2,5h$.

ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ЭЛЕМЕНТОВ КВАНТА НА ОПЕРАЦИЮ КВАНТОВАНИЯ

1. Предположим, что средняя величина времени на исправление всех ошибок в кванте равна $\tau \cdot x(1-p^x)$. Тогда выражение для определения величины оптимального кванта и связанных с новым значением пробела $c + \tau \cdot x(1-p^x)$ информационных затрат на квантование будет определяться из выражения:

$$M1(x) = \left[x + c + \tau \cdot x(1 - p^x) \right] \cdot \int_0^{\infty} \left(\text{trunc}\left(\frac{z}{x}\right) + 1 \right) \cdot f(z) dz. \quad (2)$$

2. Предположим, что $\tau_1 = 5h$ а среднее время на исправление ошибок кванта, определённое при условии применения биномиального распределения ошибок кванта будет определяться по формуле (3).

$$b(x) = \tau_1 \cdot \sum_{k=0}^x \left[\frac{x!}{(k-1)! (x-k)!} \cdot (1-p)^k \cdot p^{x-k} \right]. \quad (3)$$

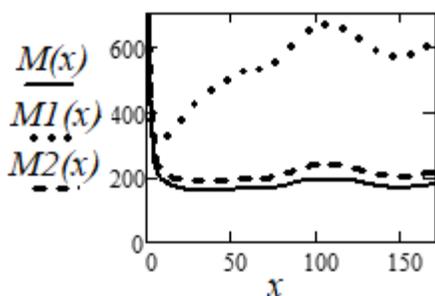


Рис. 2. Математические ожидания рассчитанных квантованных функций

На Рис. 2 представлены для сравнения математические ожидания трёх рассчитанных квантованных функций $M(x)$, $M1(x)$, $M2(x)$.

Оптимальные значения квантов и математические ожидания квантованных величин равны:

$$M(31) = 157,032, \quad M1(31) = 426,155, \\ M2(31) = 191,223.$$

Следует отметить, что оптимальная величина кванта сохраняется постоянной, равной $x_0 = 31$ во всех трёх случаях, а затраты квантования изменяются, что указывается в правых частях трёх равенств. Величина пробелов зависит от величины тактического значения c и величины времени для исправления ошибок квант, которая добавляется к c . Средняя величина времени для исправления ошибок зависит от вида распределения ошибок в кванте, вероятности ошибки элемента кванта и затрат на исправление одиночной ошибки в нём. На Рис. 3 и 4 показаны уточнение Рис. 2 и затраты на исправление (восстановление) в рассмотренных двух примерах $d(x) = \left[\tau \cdot x \cdot (1 - p^x) \right]$ и $b(x)$, определяемого формулой (3).

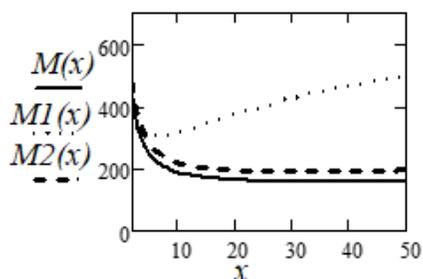


Рис. 3. Математические ожидания рассчитанных квантованных функций с учетом затраты на восстановление

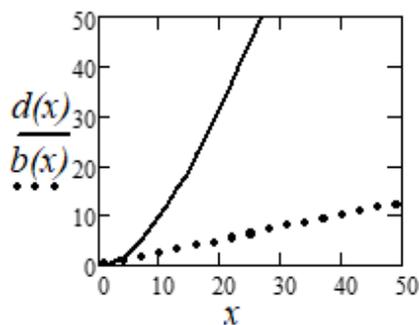


Рис. 4. Зависимость затрат на исправление ошибок

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ И ЕЁ МАКСИМУМА ПРИ КВАНТОВАНИИ

1. Предположим, что за единицу времени (скорость) передаётся $I=10\text{ед./}h$ информации. Тогда математическое ожидание количества информации определяется выражением:

$$M3(x) = (x \cdot I + c) \cdot \int_0^{\infty} (\text{trunc}(\frac{z}{x}) + 1) \cdot f(z) dz. \quad (4)$$

2. При условии 1, но с учётом задержки на восстановление ошибок в кванте

$$b(x) = \tau_1 \cdot \sum_{k=0}^x \left[\frac{x!}{(k-1)! \cdot (x-k)!} \cdot (1-p)^k \cdot p^{x-k} \right]. \quad (5)$$

$$M4(x) = (x \cdot I + c + b(x)) \cdot \int_0^{\infty} (\text{trunc}(\frac{z}{x}) + 1) \cdot f(z) dz. \quad (6)$$

На Рис. 5 представлены графики для выражений (4) и (6).

Из Рис. 5 следуют оптимальные величины квантов равны $x_{30} = 31h$, $x_{40} = 110h$ и значения количеств информации при них соответственно $1,374 \times 10^3$ ед., $1,916 \times 10^3$ ед.

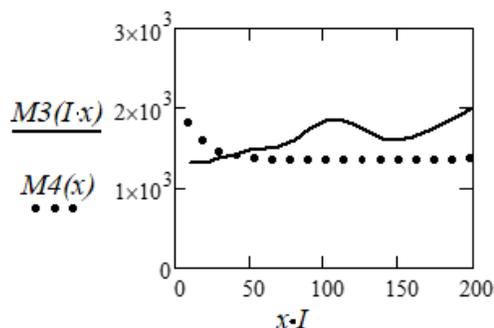


Рис. 5. Зависимость математического ожидания количество информации от величины кванта и задержек на восстановление

КОНТРОЛЬ ЭЛЕМЕНТОВ КВАНТА В ПРОЦЕССЕ КВАНТОВАНИЯ

Исходные данные:

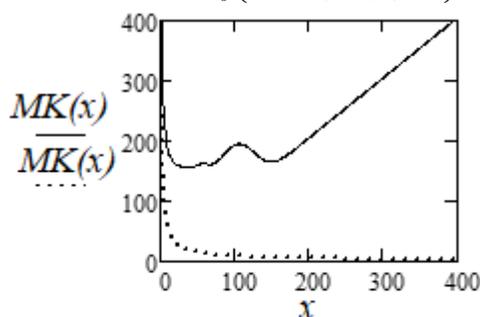
$$m = 120h, \sigma = 20h, f(x) = \text{dnorm}(x, m, \sigma), q = 1, c = 5h, q_1 = 0,5.$$

где q, q_1 – вероятности ошибок элементов кванта.

На Рис. 6 и 7 представлены следующие значения математических ожиданий квантованного распределения:

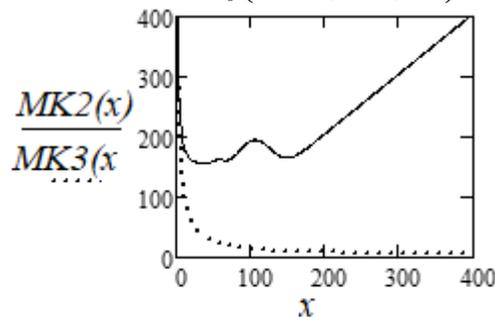
$$MK(x) = (x \cdot q^x + c) \cdot \int_0^{\infty} \left(\text{trunc} \left(\frac{z}{x} \right) + 1 \right) \cdot f(z) dz, \quad MK1(x) := (x \cdot q1^x + c) \cdot \int_0^{\infty} \left(\text{trunc} \left(\frac{z}{x} \right) + 1 \right) \cdot f(z) dz,$$

$$MK2(x) = (x \cdot q^x + c) \cdot \int_0^{\infty} \left(\text{trunc} \left(\frac{z}{x \cdot q^x} \right) + 1 \right) \cdot f(z) dz, \quad MK3(x) := (x \cdot q1^x + c) \cdot \int_0^{\infty} \left(\text{trunc} \left(\frac{z}{x \cdot q1} \right) + 1 \right) \cdot f(z) dz.$$



$$MK(200) = 205,002, \quad MK1(200) = 205,002$$

Рис. 6. Математические ожидания квантованного распределения с учетом ошибок с вероятностью q



$$MK2(200) = 205,002, \quad MK3(200) = 9,207$$

Рис. 7. Математические ожидания квантованного распределения с учетом ошибок с вероятностью $q1$

Из графиков кривых на рисунках следует, что увеличение вероятности ошибки элементов оптимального (и любого) кванта увеличиваются итоговые показатели квантованного с пробелами распределения вероятностей (в данном случае с 5 единиц до 9,207 единиц).

ПРИМЕНЕНИЕ КВАНТОВАНИЯ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФРАКТАЛОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для примера принимаются следующие исходные данные: $x = 0, 1..200$, $m = 120h$, $\sigma = 20h$, $f(x) = \text{dnorm}(x, m, \sigma)$.

В рассматриваемом примере применим для ограничения числа определяемых фракталов распределения гипердельтную аппроксимацию [9-10] нормального распределения и ограничимся двумя начальными моментами. Тогда плотность вероятности представится в виде:

$$f(x) \approx \frac{1}{2} \cdot (\Delta(x - m + \sigma) + \Delta(x - m - \sigma)), \quad (7)$$

где $\Delta(x)$ – дельта-функция Дирака, равная $\Delta(x) = \frac{d}{dx} \Phi(x)$.

В нашем случае $f(x) \approx \frac{1}{2} \cdot (\Delta(x - 120 + 20) + \Delta(x - 120 - 20))$.

$$\int_0^{\infty} E\left(\frac{z}{x}\right) \cdot f(z) dz - 1 = 0. \quad (8)$$

Выполним приближённое решение данного интегрального уравнения с помощью гипердельтной аппроксимации. Для примера рассмотрим определение двух начальных момента уравнения (8). Оно иллюстрируется следующими выражениями:

математического ожидания

$$MM(x) = (x+c) \cdot \int_0^{\infty} \left(trunc\left(\frac{z}{x}\right) + 1 \right) \cdot \left[\frac{1}{2} (\Delta(z-m+\sigma)) + \Delta(z-m-\sigma) \right] dz, \quad (9)$$

которое приводится к виду:

$$MM(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+c) \cdot \left(trunc\left(\frac{m-\sigma}{x}\right) + 1 \right) + \left(trunc\left(\frac{m+\sigma}{x}\right) + 1 \right); \quad (10)$$

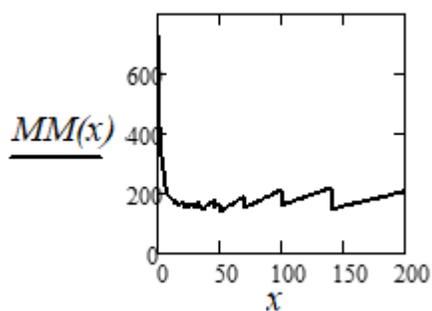
второго начального момента

$$MB(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+c)^2 \cdot \left(trunc\left(\frac{m-\sigma}{x}\right) + 1 \right)^2 + \left(trunc\left(\frac{m+\sigma}{x}\right) + 1 \right)^2; \quad (11)$$

среднее квадратическое отклонение определяется по выражениям (10) и (11)

$$\sigma\sigma(x) = \sqrt{MB(x) - MM(x)^2}. \quad (12)$$

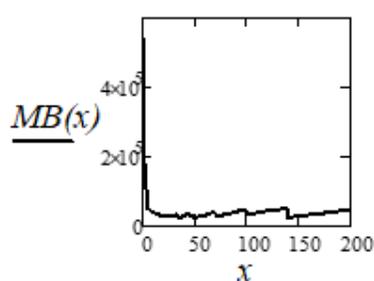
На Рис. 8-10 представлены графики функций 10, 11, 12.



$$M(31) = 157,032$$

$$M(30) = 157,5$$

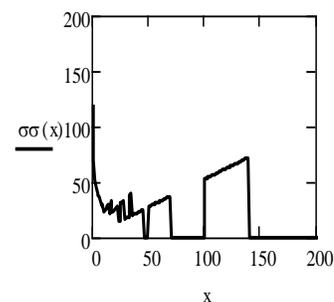
Рис. 8. Математическое ожидание с учетом гипердельтной аппроксимации



$$M(31) = 2,657 \times 10^4$$

$$M(30)^2 = 2,481 \times 10^4$$

Рис. 9. Второй начальной момент



$$\sigma\sigma(31) = 18$$

Рис. 10. Среднее квадратическое отклонение

В частности, коэффициент корреляции определяется с помощью выражений

$$\eta\eta(x) = \frac{\sigma\sigma(x)}{MM(x)}, \quad \eta\eta(31) = 0,111, \quad \frac{20}{120} = 0,167, \quad \frac{18}{157,032} = 0,115.$$

Плотность вероятности и функция распределения оптимального кванта определяются из выражений: $x_0 = -100, -99..120$, $f(x_0) = dnorm(x_0, 31, 27, 345)$, $ff(x) = dnorm(x, 157,5, 18)$, $F_0(x_0) = \int_{-100}^{x_0} f_0(z_0) dz_0$, $F_0(31) = 0,5$.

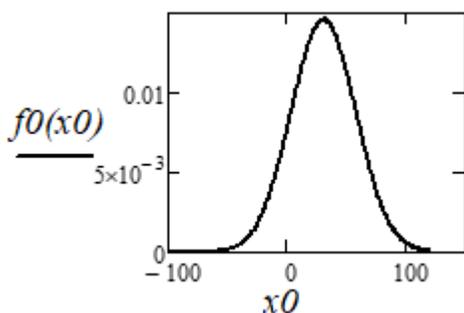


Рис. 11. Плотность вероятности

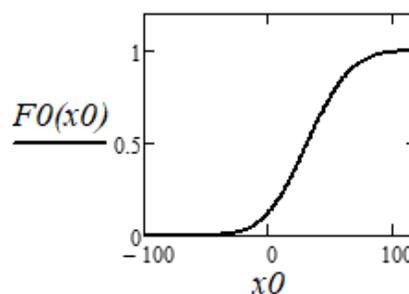


Рис. 12. Функция распределения оптимального кванта

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФРАКТАЛОВ

Значения фракталов определяются из выражений [11]. Пусть задана плотность вероятности $f(x)$ на полуинтервале $[0, \infty)$, требуется представить её в виде убывающей фрактальной последовательности, составленной базовым, основным фракталом Φ_0 и множеством субфракталов $C\Phi_i$, $i=1, 2, 3..$ Тогда можно принять следующую формулу для производства фрактализации:

$$\int_0^{\infty} E\left(\frac{z}{x}\right) \cdot f(z) dz - 1 = 0, \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta(x-m+\sigma) + \Delta(x-m-\sigma)). \quad (13)$$

В нашем случае получаем уравнение

$$\int_0^{\infty} trunc\left(\frac{z}{x}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\Delta(z-m+\sigma) + \Delta(z-m-\sigma))\right] dz - 1 = 0 \quad (14)$$

которое приводится к выражению:

$$r(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(trunc\left(\frac{m-\sigma}{x}\right) + trunc\left(\frac{m+\sigma}{x}\right) \right) - 1 = 0. \quad (15)$$

Решение $r(x) = 0$ эквивалентно решению уравнения $\int_0^{\infty} E\left(\frac{z}{x}\right) \cdot f(z) dz - 1 = 0$.

Содержательный смысл (13) состоит в том, что математическое ожидание E не должно превышать единичного значения, но и не быть отрицательным. Нужно принять равенство $x = \Phi_0$ и решить полученное нелинейное уравнение относительно неизвестной величины Φ_0 . При этом нужно как можно точнее вычислить эту величину. А затем проверить

правильность достаточно строгого решения уравнения (13). Эта численная величина и будет представлять базовый, основной факториал. Можно убедиться, что точное решение уравнения (13) достигается при $\max \Phi_0$ и оно будет единственным. Оно представлено на Рис. 13, по максимальной величине абсциссы означает, что нулевой фрактал будет равен $\Phi_0 = 100h$.

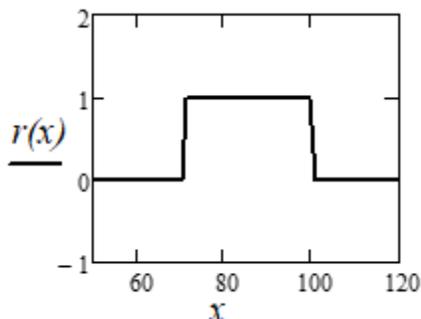


Рис. 13. Определение базового фрактала

Следующим шагом процесса будет вычисление значения величины первого субфрактала Φ_1 . Этот процесс будет аналогичен предыдущему процессу вычисления Φ_0 . Но нелинейное уравнение необходимо изменить таким образом, чтобы оно приняло следующую форму:

$$\frac{1}{\int_0^{\infty} f(u) du} \cdot \int_{\Phi_0}^{\infty} E\left(\frac{z - \Phi_0}{\Phi_1}\right) \cdot f(z) dz - 1 = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) приводится к виду

$$\int_{100}^{\infty} \text{trunc}\left(\frac{u}{\Phi_1}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\Delta(x - m + \sigma) + \Delta(x - m - \sigma))\right] - 1 = 0, \quad (17)$$

а (17) – к виду

$$rr(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\text{trunc}\left(\frac{m - \sigma + 100}{x}\right) + \text{trunc}\left(\frac{m - \sigma - 100}{x}\right) \right) - 1 = 0. \quad (18)$$

Решая (18), получаем максимальное $x_1 = 20h$, для которого $rr(20) = 0$, это означает что $\Phi_1 = 20h$. Максимум нуля наблюдается при $20h$.

Таким образом, первый субфрактал определен. Это соответствует Рис. 14.

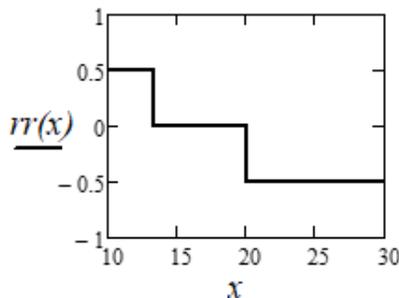


Рис. 14. Определение первого субфрактала

Следующим шагом процесса становится вычисление значения величины второго субфрактала Φ_2 . Для этого необходимо использовать следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} f(u) du} \cdot \int_{\Phi_0+\Phi_1}^{\infty} E\left(\frac{z-\Phi_0-\Phi_1}{x}\right) \cdot f(z) dz - 1 = 0,$$

Исходные данные уравнения для нахождения второго субфрактала представляется в виде:

$$x_0 = \Phi_2 \cdot z = u + 120, f(x) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta(x-m+\sigma) + \Delta(x-m-\sigma)), \frac{1}{\int_{120}^{\infty} f(z) dz} = 2,$$

$$\int_{120}^{\infty} \text{trunc} \frac{z-120}{x} \cdot [\Delta(z-m+\sigma) + \Delta(z-m-\sigma)] dz - 1 = 0.$$

$$kk(x) = \left(\text{trunc} \left(\frac{m-\sigma+120}{x} \right) + \text{trunc} \left(\frac{m+\sigma-120}{x} \right) \right) - 1 = 0. \quad (19)$$

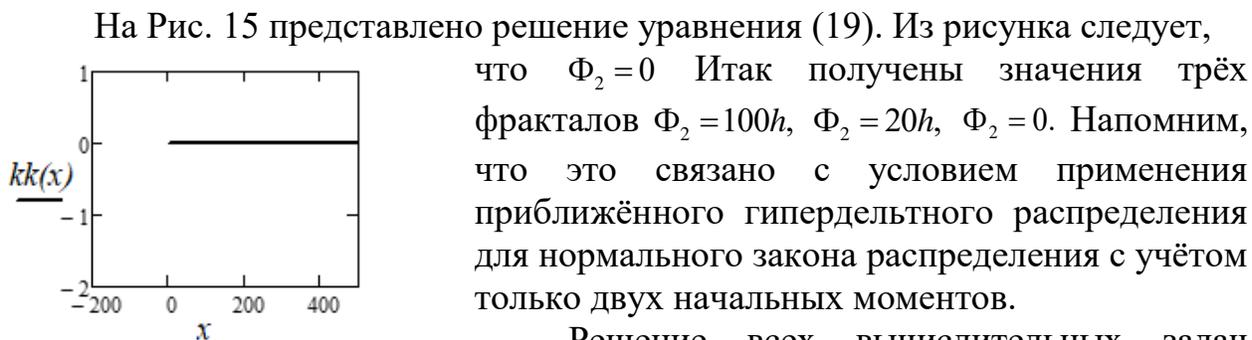


Рис. 15. Определение второго субфрактала

Решение всех вычислительных задач выполнялось с помощью вычислительной среды [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Потребности в решении проблемы оптимального квантования информации в процессах хранения, обработки и передачи больших объемов данных постоянно увеличиваются. Специалистам в области Big Data \ Data Science постоянно приходится сталкиваться с данной проблемой [13-15]. Однако инженерных моделей и методов решения подобных задач в зарубежной и отечественной литературе встречается не так много. В процессе решения практических задач, в которых применяется оптимальное в смысле заполнения квантование информации, разработчику математических моделей систем необходимо рассматривать специфические прикладные вопросы, дополняющие и расширяющие количественные характеристики предложенной математической модели [1].

В статье рассмотрены конкретные вспомогательные математические модели для решения прикладных практических задач, связанных с квантованием информации, учитывающие затраты на поиск и устранения ошибок в квантах, а также применения квантования для последовательного определения значений фракталов распределений вероятностей. Использование в математических моделях определения характеристик фракталов распределений вероятностей гипердельтную аппроксимацию значительно упростило получение решений, хотя вносит некоторую погрешность. Устранить этот недостаток можно путем увеличения числа этапов в аппроксимирующем гипердельтном распределении, что требует учета большего числа начальных моментов исходного распределения. Подробно вопросы точности гипердельтной аппроксимации обсуждаются в работе [9]. Программа для расчета параметров аппроксимирующего гипердельтного распределения по методу моментов на языке Java представлена в [10].

Представленные в статье математические модели быть полезны аспирантам, докторантам и исследователям конкретных задач практической направленности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК / REFERENCES

1. Андронов А.М., Бокоев Т.Н. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С.154–158. [Andronov AM., Bokoev TN. Quantization of information, optimal in the sense of filling. Izv Academy of Sciences of the USSR. Technical cybernetics. 1979;3:154-158. (In Russ.)].
2. Гришанин Б.А. Учёт ценности информации в теории ценности информации // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1967. – № 2. – С. 76–79. [Grishanin BA. Accounting for the value of information in the theory of the value of information. Izv.

- Academy of Sciences of the USSR. Technical cybernetics*. 1967;2:76-79. (In Russ.).
3. Киселева Т.П. Особенности синхронизации в системах технологии LTE OFDMA / Сборник трудов XIV Международной отраслевой научно-технической конференции «Технологии информационного общества». 18–19 марта 2020 года; Москва: ООО "Издательский дом Медиа паблишер", 2020. – С. 160–166. [Kiseleva TP. Features of synchronization in systems of LTE OFDMA technology / Proceedings of the XIV International Industrial Scientific and Technical Conference “Information Society Technologies”. 2020 March 18-19; Moscow: “Publishing House Media Publisher” LLC; 2020. pp. 160 -166. (In Russ.)].
 4. Бочарова Д.В. Возможные пути увеличения динамического диапазона обрабатываемого сигнала в трактах предварительной обработки в многоканальных гидроакустических комплексах / Сборник научных статей III Международной научно-технической и научно-методической конференции «Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании». 25–26 февраля 2014 года; Санкт-Петербург. 2014. – С. 53–57. [Bocharova DV. Possible ways to increase the dynamic range of the processed signal in the paths of preprocessing in multichannel hydroacoustic systems / Collection of scientific articles of the III International scientific-technical and scientific-methodical conference “Actual problems of information telecommunications in science and education”. 2014 February 25-26; St. Petersburg. 2014. pp. 53-57. (In Russ.)].
 5. Патент РФ на изобретение № 2005133952/09 Тезин А.В., Шмойлов А.В., Шульгин Р.Н. Способ передачи дополнительной информации при совместном использовании векторного квантования и фрактального кодирования изображений. [Pat. RUS № 2005133952/09 Tezin AV, Shmoilov AV, Shulgin RN. Sposob peredachi dopolnitel'noy informatsii pri sovместnom ispol'zovanii vektornogo kvantovaniya i fraktal'nogo kodirovaniya izobrazheniy. (In Russ.)]. Доступно по: https://patents.s3.yandex.net/RU2313917C2_20071227.pdf. Ссылка активна на: 11.02.2021.
 6. Chen X, Tuncel E. Low-Delay prediction – and transform-based Wyner-Ziv coding. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2011;59(2):653-666. doi: 10.1109/tsp.2010.2090524
 7. Khina A, Khisti A, Hassibi B, Kostina V. Tracking and control of Gauss-Markov processes over packet-drop channels with acknowledgments *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. 2019;6(2):549-560. doi: 10.1109/tcns.2018.2850225
 8. Lyandres V. Mobile network synthesis strategy *Information and Control Systems*. 2019;(1):98-101. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-98-101
 9. Смагин В.А., Филимоныхин Г.В. О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения // АВТ. – 1990. – № 5. – С. 25–31. [Smagin VA, Filimonikhin GV. On modeling of random processes based on hyperdelt distribution. *AUT*. 1990;5:25-31. (In Russ.)].
 10. Свидетельство о государственной регистрации программы ЭВМ № 201561737. Сергеев С.А., Бубнов В.П., Бубнов В.В. Программа для расчёта параметров аппроксимирующего гипердельтного распределения по методу моментов. [Certificate of state registration of the computer program №. 201561737. Sergeev SA, Bubnov VP, Bubnov VV. Programma dlya raschota parametrov approksimiruyushchego giperdel'tnogo raspredeleniya po metodu momentov (In Russ.)]. Доступно по: <https://new.fips.ru/Archive/EVM/2015/2015.08.20/DOC/RUNW/000/002/015/617/637/document.pdf>. Ссылка активна на: 11.02.2021.

11. Смагин В.А., Бубнов В.П. Математическая модель детерминированных и случайных процессов в виде последовательного гиперфрактального распределения // Автоматика на транспорте. – 2019. – Т. 5. – № 2. – С. 145–159. [Smagin VA, Bubnov VP. Mathematical model of deterministic and random processes in the form of sequential hyperfractal distribution. *Automation in transport*. 2019; 5(2):145-159. (In Russ.)]. Доступно по: Download (atjournal.ru). Ссылка активна на: 11.02.2021.
12. Кирьянов Д.В. Mathcad 12. Санкт-Петербург, "БХВ-Петербург", 2005. [Kiryanov DV. *Mathcad 12*. St. Petersburg: "BHV-Petersburg; 2005. (In Russ.)].
13. Hering JG. From slide rule to big data: how data science is changing water science and engineering *Journal of Environmental Engineering, ASCE*. 2019. 145(8):02519001. doi 10.1061/(asce)ee.1943-7870.0001578
14. Novikov SV. Data science and big data technologies role in the digital economy *TEM Journal: Technology, Education, Management, Informatics*. 2020. 9(2):756–762. doi. 10.18421/tem92-44
15. An T. Science opportunities and challenges associated with SKA big data *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*. 2019. 62(8):989531. doi: 10.1007/s11433-018-9360-x

Сведения об авторах:

Смагин Владимир Александрович – ЗДНРФ, доктор технических наук, профессор;

e-Library SPIN: 7284-5007; ORCID: 0000-0002-0120-6145;

E-mail: va_smagin@mail.ru

Бубнов Владимир Петрович – доктор технических наук, профессор;

e-Library SPIN: 3114-6579; ORCID: 0000-0002-6742-3011;

E-mail: bubnov1950@yandex.ru

Султонов Шохрух Холмурзаевич – аспирант;

e-Library SPIN: 7241-7158; ORCID: 0000-0002-0462-8677;

E-mail: sultonovsh@yandex.ru

Information about the authors:

Vladimir A. Smagin – The honoured worker of a science of the Russian Federation, Doctor of Technical Sciences, Professor;

e-Library SPIN: 7284-5007; ORCID: 0000-0002-0120-6145;

E-mail: va_smagin@mail.ru

Vladimir P. Bubnov – Doctor of Technical Sciences, Professor;

e-Library SPIN: 3114-6579; ORCID: 0000-0002-6742-3011;

E-mail: bubnov1950@yandex.ru

Shokhrukh Kh. Sultonov – Postgraduate student;

e-Library SPIN: 7241-7158; ORCID: 0000-0002-0462-8677;

E-mail: sultonovsh@yandex.ru

Цитировать:

Смагин В.А., Бубнов В.П., Султонов Ш.Х. Математические модели для расчета количественных характеристик оптимального квантования информации // Транспортные системы и технологии. – 2021. – Т. 7. – № 1. – С. 46–58. doi: 10.17816/transsyst20217146-58

To cite this article:

Smagin VA, Bubnov VP, Sultonov ShKh. Mathematical models for calculating the quantitative characteristics of the optimal quantization of information. *Transportation Systems and Technology*. 2021;7(1):46-58. doi: 10.17816/transsyst20217146-58