Рубрика 2. НАУЧНЫЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

Направление – Электротехника

УДК [UDC] 501

DOI 10.17816/transsyst20217159-70

© В. Н. Таран^{1,2}, М. В. Шевлюгин³, А. В. Шандыбин¹

¹Ростовский государственный университет путей сообщения

²Донской государственный технический университет

(Ростов-на-Дону, Россия)

³Российский университет транспорта (МИИТ)

(Москва, Россия)

ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Цель: Оценка точности численного метода относительно аналитического решения.

Методы: В статье производится анализ точности численных вычислений на основе метода конечных элементов. Рассмотрена вариационная схема метода.

Результаты: Получены и проанализированы зависимости погрешностей от количества использованных симплексов. Отмечены пути дальнейшего повышения точности.

Заключение: Даны рекомендации по возможному применению метода конечных элементов при решении задач расчета электромагнитных полей реальных объектов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, численные методы, электрический потенциал, оценка точности.

Rubric 2. SCIENTIFIC AND PRACTICAL DEVELOPMENTS

Field – Electrical Engineering

© V. N. Taran^{1,2}, M. V. Shevlyugin³, A. V. Shandybin¹

¹ Rostov State Transport University

² Don State Technical University

(Rostov-on-Don, Russia)

³ Russian University of Transport

(Moscow, Russia)

THE ACCURACY OF NUMERICAL METHODS FOR THE ANALYSIS OF ELECTROSTATIC FIELDS

Aim: Estimation of the accuracy of the numerical method relative to the analytical solution.

Methods: This article reports on studies of the accuracy of numerical calculations based on the finite element method. The variational scheme of the method is considered.

Results: The dependences of errors on the number of simplexes used are obtained and analyzed. The authors noted ways to further improve accuracy.

Conclusion: The article gives recommendations on the possible application of the finite element method in solving problems of calculating the electromagnetic fields of real objects.

Keywords: finite element method, numerical methods, electric potential, accuracy assessment.

ВВЕДЕНИЕ

Существуют многочисленные методы решения задач оценки. Эти задачи имеют первостепенное значение при решении вопросов защиты, построении экранов, оценки безопасностей уровней электрического поля и других [1–4].

Большинство из этих методов опирается на численные расчеты, поскольку аналитические методы имеют узкую область решений, так как граничные условия для таких задач должны совпадать с координатными плоскостями и уровнями. Как правило, аналитические методы решаются методом разделения переменных. Разумеется, точность таких методов абсолютна. Однако для решения прикладных задач они плохо приспособлены, поскольку реальные задачи имеют сложную геометрию, кусочно-линейное представление параметров среды, в частности электрических и магнитных.

Тем ни менее значения, полученные с помощью численных методов, нуждаются в верификации и проверке на адекватность и точность. Разумеется, это можно сделать, сравнивая с аналитическими решениями, а затем полученные точности пролонгировать на задачи, близкие по метрике.

В данной статье ставится цель оценки численных методов расчета потенциалов, основанных на методе конечных элементов.

ВАРИАЦИОННАЯ СХЕМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Вариация. Основная идея метода конечных элементов была предложена Р. Курантом в 1943 г. и основана она на использовании функциональной трактовки законов электростатики. Связывая функционал с дифференциальным уравнением Лапласа можно получить эффективный способ решения задачи о распределении электростатического поля.

Задача определения стационарного электрического поля в общем случае сводится к минимизации функционала вида [5]:

$$\Phi[\varphi(x, y)] = \iint_{\Omega} F[x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y] dx dy, \quad (1)$$

где $\varphi(x, y)$ – функция потенциала электрического поля;

φ_x, φ_y – частные производные по координатам, соответственно, x и y ;

Подынтегральная функция $F[...]$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.

Искомая функция φ на границе Γ области Ω должна удовлетворять значениям граничной функции f .

Экстремум такого функционала находится на основе определения функциональной производной в стационарной точке, то есть в такой точке, где функционал достигает своего минимума или максимума. Здесь под точкой понимается такое ее обобщение, при котором для определения этой точки требуется бесконечное количество координат [6], иными словами это просто функция двух переменных в двумерном гильбертовом пространстве H^2 . При этом функция φ определена в области Ω . Графическое представление $\varphi(x, y)$ дано на Рис. 1.

Рис. 1. График функции потенциала электрического поля

Для вычисления функциональной производной воспользуемся ее определением [7, 8]:

$$\lim_{\substack{\text{diam } \omega \rightarrow 0 \\ \max_{\xi, \zeta \in \omega} \delta\varphi \rightarrow 0}} \frac{\Phi[\varphi + \delta\varphi] - \Phi[\varphi]}{\iint_{\Omega} \delta\varphi \cdot dx dy} = \frac{\delta\Phi[\varphi]}{\delta\varphi}. \quad (2)$$

Здесь $\text{diam } \omega$ означает диаметр многообразия ω , определяемый как

$$\text{diam } \omega = \sup_{a, b \in \omega} d(a, b), \quad (3)$$

где d – квадратичная метрика.

Вариация $\delta\varphi$ имеет игольчатый характер, представленный на Рис. 1 элементом $(\varphi + \delta\varphi)$.

Применение операции (2) для вычисления экстремального значения функционала (1) составляет суть теоремы Остроградского-Эйлера.

Воспользовавшись результатом этой теоремы, можем записать соответствующее уравнение Остроградского-Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) = 0. \quad (4)$$

В частном случае, когда подынтегральная функция имеет следующий вид:

$$F = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5)$$

уравнение Остроградского-Эйлера становится эквивалентным уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

с граничным условием

$$\varphi|_{\Gamma} = f. \quad (7)$$

Конечные элементы. Предположим, что носитель функции φ имеет вид треугольного симплекса в двумерном пространстве (плоскость xOy на Рис. 2).

Рис. 2. Линейная потенциальная функция $\varphi(x, y)$

В вершинах симплекса потенциал будем считать на первых порах заданным и равным $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Тогда текущее значение потенциала в точках, принадлежащих носителю $(x, y) \in \Delta$, определим линейной формой

$$\varphi = a + bx + cy. \quad (8)$$

Для определения коэффициентов a, b и c линейной формы (8) необходимо составить систему уравнений для угловых точек симплекса и разрешить ее относительно неизвестных коэффициентов [5].

Затем произведя покрытие всей области Ω треугольными элементами (Рис. 1), с учетом равенства потенциалов на границах смежных элементов получаем два множества точек. В точках, которые лежат на границе Γ , потенциалы заданы и определяются функцией (7), а потенциалы внутри области Ω неизвестны и находятся исходя из минимума функционала (1).

Отметим, что подстановка линейных функций φ в функционал (1) превращает его в функцию $N=n+m$ переменных, где N – количество узловых точек конечных элементов, n – неизвестные потенциалы, m – известные. В частном случае вида (5) эта функция является положительно определенной квадратичной формой, относительно потенциалов φ . Матрица, определяющая эту форму, получила название матрицы Дирихле. Поэтому в этом случае операция определения экстремума функционала превращается в обычное дифференцирование по n переменным. Подчеркнем, что дифференцирование осуществляется только по неизвестным потенциалам. Таким образом, схема метода конечных элементов заключается в последовательном выполнении следующих операций:

- разбиение области на треугольные элементы;
- определение матрицы Дирихле для каждого элемента и объединение ее на всей области;
- разделение потенциалов на известные и искомые;
- определение производной функционала и приравнивание ее к нулю;
- решение системы линейных уравнений и определение неизвестных потенциалов в узлах симплексов.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Абсолютную точность, как указывалось ранее, дают аналитические решения, однако, в большинстве практических случаев получить эти решения не представляется возможным. Тем ни менее во многих практических приложениях используются конструкции, позволяющие найти эти аналитические решения. Например, коаксиальные кабели, волноводы, установки по созданию сверхмощного импульса тока РС-20, электростатические фильтры для отчистки технических жидкостей и газов [9, 10] и другие устройства.

Одновременно такого рода задачи, имеющие аналитические решения, можно использовать в качестве эталонных для определения точности численных алгоритмов [11].

Выберем следующую задачу [12, 13]: задан коаксиал с радиусом внутреннего проводника $r_1 = 1$ мм, внутренним радиусом внешнего

трубчатого проводника $r_2 = 4$ мм. Потенциал внутреннего проводника $\varphi|_{r_1} = 400$ В, а трубчатый проводник заземлен ($\varphi|_{r_2} = 0$ В).

В цилиндрической системе координат уравнение Лапласа для данной задачи имеет известный вид [13]. Решением данного уравнения является распределение потенциала φ внутри коаксиала. Аналитическое представление потенциала выглядит:

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2, \quad (9)$$

где C_1 и C_2 – константы, определяемые из граничных условий.

Для простоты рассмотрения и учитывая осесимметричность ограничимся четвертью коаксиальной области.

Для оценки точности численного решения будем разбивать область между проводниками на различное количество симплексов. Для примера рассмотрим два варианта, представленные на Рис. 3.

Рис. 3. Варианты разбиения на конечные элементы:
а – 16 элементов, б – 200 элементов

Матрица Дирихле каждого элемента легко вычисляется [5], поскольку производные в (5) от линейной функции (8) являются константами, хотя выкладки носят громоздкий характер. Для примера приведен элемент этой матрицы:

$$S_{12}^{(e)} = \frac{1}{4A} \{ (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \}, \quad (10)$$

где A – площадь треугольного элемента.

Остальные восемь получаются путем циклической перестановки индексов координат. Энергия одного элемента определяется на основании формул (1) и (5):

$$\Phi[\varphi] = \frac{1}{2} \varphi^T S^{(e)} \varphi, \quad (11)$$

где T – символ транспонирования вектора потенциалов $\varphi^T = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$.

На примере (11) видно, что функционал для данного элемента имеет квадратичную форму трех переменных. Поэтому определение экстремума функционала по всей области Ω сводится к дифференцированию энергии по свободным потенциалам и приравниванию результата к нулю. Полученная система линейных уравнений имеет симметричную ненулевую матрицу и потому имеет решение.

Проведем исследования погрешности вычислений в зависимости от количества конечных элементов, покрывающих область Ω . Будем использовать энергетическую метрику для оценки погрешности расчетов потенциалов

$$\varepsilon = \sqrt{\iint_{\Omega} |\varphi_a(x, y) - \varphi_d(x, y)|^2 dx \cdot dy}, \quad (12)$$

где φ_a – аналитическое решение (9);

φ_d – численное решение.

При этом погрешность вычисления энергии составляет

$$\xi = |\Phi(\varphi_a) - \Phi(\varphi_d)|. \quad (13)$$

Для удобства интерпретации погрешности выражены в относительных единицах в %. В качестве базовых значений для вычисления относительных погрешностей взята норма аналитического потенциала $\|\varphi_a\|$ и соответствующая энергия.

Данные расчёты представлены на Рис. 4.

Рис. 4. Результат вычисления относительных погрешностей

Произведем анализ результатов расчетов. Представим, что неточность вычислений потенциалов есть функция $h(x, y)$, норма которой $\|h\|$ меньше некоторой положительной малой величины. Причем функция $h|_{\Gamma}$ на границе области Ω имеет значение равное нулю в силу того, что в этих точках потенциалы заданы и не вычисляются.

Рассмотрим изменение энергии, вызванное неточностью вычислений

$$\Phi(\varphi + \theta h) = \Phi(\varphi) + \theta \iint_{\Omega} (\nabla \varphi)(\nabla h) dx dy + \frac{1}{2} \theta^2 \iint_{\Omega} (\nabla h)^2 dx dy, \quad (14)$$

где θ – малая положительная величина;

∇ – градиент.

Используя теорему Грина данное выражение можно привести к виду [5]:

$$\Phi(\varphi + \theta h) = \Phi(\varphi) + \theta^2 \Phi(h). \quad (15)$$

Анализ формулы (15) показывает, что теоретически ошибка в вычислении потенциала пропорциональна θ . При этом ошибка в определении энергии пропорциональна θ^2 . Однако, проведенный вычислительный эксперимент, показывает, что для данной задачи это выполняется в диапазоне от 72 до 200 элементов. При дальнейшем увеличении теория предсказывает, что ошибка по энергии должна уменьшаться существенно быстрее, чем ошибка по потенциалам, однако в действительности происходит все ровно наоборот. Причина такого поведения погрешностей может быть объяснена наличием вычислительных погрешностей, связанных с ограничением разрядности. Эти ограничения имеют случайный характер и поэтому проявляется неустойчивость ввиду уменьшения размеров конечных элементов. Отсюда следует вывод о том, что для дальнейшего уменьшения ошибки необходимо использовать на конечных элементах нелинейные поверхности более высоких порядков.

Величины погрешностей, при незначительном увеличении количества симплексов, лежат в пределах допустимых величин, характерных для метода конечных элементов [14].

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ

Рассмотренный метод может быть использован для анализа внешних воздействий при решении задач электромагнитной совместимости. Множество подобных проблем существует в электротехническом комплексе железнодорожного транспорта [15]. Например, известна проблема электротермической деградации волоконно-оптических кабелей, подвешенных на опорах контактной сети. Одной из причин этого явления является образование на оболочке кабеля электропроводящей пленки из частиц пыли. В середине пролета между опорами потенциал поля

максимальный, а крепления кабеля на опорах заземлены и имеют минимальный потенциал, это притягивает заряженные частицы к креплению и в итоге они оседают на оболочке кабеля вблизи опоры. Далее наводимый в этих пленках ток разогревает оболочку и способствует ее ускоренной деградации. Знание распределения электрического поля в данной задаче позволит усовершенствовать методы защиты волоконно-оптического кабеля, тем самым снизив число аварий в системах обеспечения безопасности движения поездов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение численных методов позволяет решать сложные задачи даже в случае отсутствия аналитического решения [1, 14, 16]. Наряду с этим применение метода конечных элементов дает дополнительные преимущества. К ним относится возможность расчета конструкций, либо задач с граничными условиями произвольной формы, например, как при расчете электромагнитных полей реальных объектов. Кроме того, простота перехода к неравномерным покрытиям расчетной области и высокая технологичность, масштабируемость и т.д., особенно проявляющиеся при алгоритмизации и программировании задач.

Помимо этого, метод конечных элементов позволяет смягчить требования к дифференцируемости функции – она должна быть дифференцируема минимум один раз. Следовательно, ниже требования к вычислительным мощностям при сохранении достаточной точности.

Авторы заявляют, что:

1. У них нет конфликта интересов;
2. Настоящая статья не содержит каких-либо исследований с участием людей в качестве объектов исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК / References

1. Терзян А.А., Сукиасян Г.С. О численных методах решения задач электромагнитного поля // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2010. – № 6. – С. 3–14. [Terzyan AA, Sukiasyan GS. On Numerical Methods of Solution of Electromagnetic Field Problems. *Scientific and Technical Journal Russian Electromechanics*. 2010;(4):3-14. (In Russ.)]. Доступно по: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_15557735_84379861.pdf. Ссылка активна на: 01.02.2021.
2. Шайдунов В.В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с. [Shajdurov VV. *Mnogosetochnye metody konechnykh jelementov*. Moscow: Nauka; 1989. 288 p. (In Russ.)].
3. Ковалев О.Ф., Краснов Е.Н., Лобов Б.Н. Расчет нестационарного температурного поля электромагнитных захватов методом конечных

- элементов // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 1995. – № 1–2. – С. 24–28. [Kovalev OF, Krasnov EN, Lobov BN. Raschet nestacionarnogo temperaturnogo polja jelektromagnitnyh zahvatov metodom konechnykh jelementov. *Scientific and Technical Journal Russian. Electromechanics*. 1995;(1-2):24-28. (In Russ.)].
4. Салтыков В.М., Безменова Н.В., Копичникова И.В. Выбор металлических экранов для обеспечения электромагнитной совместимости по магнитным полям промышленной частоты // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2011. – № 3. – С. 57–59. [Saltykov VM, Bezmenova NV, Kopichnikova IV. Vybora metallicheskih jekranov dlja obespechenija jelektromagnitnoj sovmestivosti po magnitnym poljam promyshlennoj chastoty. *Scientific and Technical Journal Russian Electromechanics*. 2011;(3):57-59. (In Russ.)]. Доступно по: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_16457982_72855203.pdf. Ссылка активна на: 01.02.2021.
 5. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с. [Sil'vester P, Ferrari R. *Metod konechnykh jelementov dlja radioinzhenerov i inzhenerov-jelektrikov*. Moscow: Mir; 1986. 229 p. (In Russ.)].
 6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ, издание второе. – М.: Наука, 1977. – 744 с. [Kantorovich LV, Akilov GP. *Funkcional'nyj analiz, izdanie второе*. Moscow: Nauka; 1977. 744 p. (In Russ.)].
 7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1979. – 760 с. [Dubrovin BA, Novikov SP, Fomenko AT. *Sovremennaja geometrija: Metody i prilozhenija*. Moscow: Nauka; 1979. 760 p. (In Russ.)].
 8. Таран В.Н. Функциональное уравнение длинной линии // Радиотехника и электроника. – 1991. – Т. 36 – С. 1497. [Taran VN. Funkcional'noe uravnenie dlinnoj linii. *Radiotekhnika i jelektronika*, 1991;36:1497. (In Russ.)].
 9. Патент РФ на изобретение № 166933/ 28.03.2016. Бюл. № 35. Банкул Н.В., Бодров А.И., Стельмакова Н.О., Вохмянин С.М., Мокиевец К.В., Габдуллин П.Г., Кизеветтер Д.В. Устройство для электростатической очистки технического масла. [Pat. RUS № 166933/ 28.03.2016. Byul. № 35. Bankul NV, Bodrov AI, Stel'makova NO, Vokhmyanin SM, Mokiyevevs KV, Gabdullin PG, Kizevetter DV. *Ustroystvo dlya elektrostaticheskoy ochistki tekhnicheskogo masla*. (In Russ.)]. Режим доступа: https://new.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPM&DocNumber=166933&TypeFile=html. Дата обращения: 01.02.2021.
 10. Патент РФ на изобретение № 173515/ 08.11.2016. Бюл. № 25. Штукарин Н.Г. Электросорбционный генератор водорода. [Pat. RUS № 173515/ 08.11.2016. Byul. № 25. Shturin NG. *Electrosorption hydrogen generator*. (In Russ.)]. Дата обращения: 01.02.2021. Режим доступа: https://new.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPM&DocNumber=173515&TypeFile=html.
 11. Бадёр М.П., Сачкова Е.В. Адаптация системы тягового электроснабжения постоянного тока для высокоскоростного движения // Электротехника. – 2017. – №. 9. – С. 19–25. [Badjor MP, Sachkova EV. Adaptacija sistemy tjagovogo jelektrosnabzhenija postojannogo toka dlja vysokoskorostnogo dvizhenija. *Jelektrotehnika*; 2017;(9):19-25 (In Russ.)]. Доступно по: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_29913188_78195931.pdf. Ссылка активна на: 01.02.2021.

12. Говорков В.А., Купалян С.Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах – М.: Высшая школа, 1963 – 371 с. [Govorkov VA, Kupaljan SD. *Teorija jelektromagnitnogo polja v uprazhnenijah i zadachah*. Moscow: Vysshaja shkola; 1963. 371 p. (In Russ.)].
13. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. – М.: Связьиздат, 1951. – 341 с. [Govorkov VA. *Jelektricheskie i magnitnye polja*. Moscow: Svjaz'izdat; 1951. 341 p. (In Russ.)].
14. Емельянов И.Г., Кузнецов А.В. Определение напряженного состояния тонкостенных конструкций с использованием методов теории оболочек // Транспортные системы и технологии. – 2017. – Т. 3. – № 3. – С. 64–78. [Emel'yanov IG, Kuznetsov AV. Determination of the stressed state of thin-construction structures using the methods of the theory of shells. *Transportation Systems and Technology*. 2017;3(3):64-78 (In Russ.)]. doi: 10.17816/transsyst20173364-78
15. Аполлонский С.М. Проблемы электромагнитной совместимости в электроэнергетической железнодорожной системе // Транспортные системы и технологии. – 2015. – Т. 1. – № 2. – С. 110–126. [Apollonskiy SM. Problems of electromagnetic compatibility in electricity of rail system. *Transportation Systems and Technology*. 2015;1(2):110-126 (In Russ.)]. doi: 10.17816/transsyst201512110-126
16. Баранов Л.А., Гречишников В.А., Шевлюгин М.В., Данг В.Ф. Оценка гармонических составляющих тягового тока в Московском метрополитене на основе экспериментальных замеров // Наука и техника транспорта. – 2016. – №. 2. – С. 8–13. [Baranov LA, Grechishnikov VA, Shevlyugin MV, Dang VF. Ocenka garmonicheskikh sostavljajushhih t'jagovogo toka v Moskovskom metropolitene na osnove jeksperimental'nyh zamerov. *Nauka i tehnika transporta*. 2016;(2):8-13 (In Russ.)]. Доступно по: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_26144787_44412972.pdf Ссылка активна на: 01.02.2021.

Сведения об авторах:

Таран Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор;
eLibrary SPIN: 7763-2292; ORCID: 0000-0002-1308-3883; Scopus ID: 57205870949;
E-mail: vladitaran@rambler.ru

Шевлюгин Максим Валерьевич, доктор технических наук, доцент;
eLibrary SPIN: 4123-6584; ORCID: 0000-0003-3300-5193; Scopus ID: 24922001300;
E-mail: mx_sh@mail.ru

Шандыбин Алексей Викторович; каф. «Связь на ж.д.т.»;
eLibrary SPIN: 4444-3213; Scopus ID: 57205099726;
E-mail: shav850@mail.ru

Information about the authors:

Vladimir N. Taran, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor;
eLibrary SPIN: 7763-2292; ORCID: 0000-0002-1308-3883; Scopus ID: 57205870949;
E-mail: vladitaran@rambler.ru

Maxim V. Shevlyugin, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor;
eLibrary SPIN: 4123-6584; ORCID: 0000-0003-3300-5193; Scopus ID: 24922001300;
E-mail: mx_sh@mail.ru

Aleksey V. Shandybin; dept. "Communication on the railway";
eLibrary SPIN: 4444-3213; Scopus ID: 57205099726;
E-mail: shav850@mail.ru

Цитировать:

Таран В.Н., Шевлюгин М.В., Шандыбин А.В. Точность численных методов оценки внешних электрических воздействий // Транспортные системы и технологии. – 2021. – Т. 7. – № 1. – С. 59–70. doi: 10.17816/transsyst20217159-70

To cite this article:

Taran VN, Shevlyugin MV, Shandybin AV. The Accuracy of Numerical Methods for Assessing External Electrical Influences. *Transportation Systems and Technology*. 2021;7(1):59-70. doi: 10.17816/transsyst20217159-70