

Рубрика 2. НАУЧНЫЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

Направление – Электротехнические комплексы и системы

<https://doi.org/10.17816/transsyst683922>

Труды III конференции с международным участием «Проблемы безопасности и эффективности технических систем», посвященной 205-й годовщине начала научно-педагогической деятельности Бенуа Поля Эмиля Клапейрона в Институте Корпуса инженеров путей сообщения

© **Б.А. Трифонов, Г.Е. Середа**

Петербургский государственный университет путей сообщения

Императора Александра I

(Санкт-Петербург, Россия)

РАСЧЕТ ТОКА НАГРУЗКИ АВТОНОМНОГО ИНВЕРТОРА НАПРЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Обоснование. Рассматривается однофазный мостовой автономный инвертор напряжения, работающий на активно-индуктивную нагрузку. Напряжение нагрузки формируется за счет коммутации ключевых элементов схемы, форма тока определяется параметрами нагрузки и характеризуется спектром высших гармонических составляющих. В практических расчетах зачастую интерес представляет действующее значение тока нагрузки инвертора, имеющего несинусоидальную форму, определение которого сопряжено с известными вычислительными трудностями.

Цель. Разработка способа вычисления действующего значения тока нагрузки автономного инвертора напряжения, не требующего разложения кривой тока в гармонический ряд и последующего его суммирования.

Методы. Для нахождения действующего значения тока нагрузки инвертора использована теория вычетов.

Результаты. Расчет тока нагрузки автономного инвертора с помощью выражений, полученных с использованием теории вычетов, позволяет сократить объем вычислительной работы и обеспечивает высокую точность результата, что подтверждается экспериментальными исследованиями.

Ключевые слова: автономный инвертор напряжения; ток нагрузки; теория вычетов.

Как цитировать:

Трифонов Б.А., Середа Г.Е. Расчет тока нагрузки автономного инвертора напряжения методом гармонического анализа // Инновационные транспортные системы и технологии. 2025. Т. 11, № 2. С. 307–317. doi: 10.17816/transsyst683922

Rubric 2. SCIENTIFIC AND PRACTICAL DEVELOPMENTS

Field – Electrotechnical complexes and systems

© **B.A. Trifonov, G.E. Sereda**Emperor Alexander I St.-Petersburg State Transport University
Saint-Petersburg, Russia**CALCULATION OF LOAD CURRENT OF SELF-EXCITED
VOLTAGE INVERTER BY HARMONIC ANALYSIS**

BACKGROUND. The paper discusses a single-phase bridge self-excited inverter operating into active inductive load. The load voltage is generated by switching the key circuit elements; the current shape is determined by the load parameters and characterized by the higher harmonic spectrum. In practice, the calculations are often focused on the effective inverter load current of a non-sinusoidal shape; its determination is associated with known computational difficulties.

AIM. To develop a method to calculate the effective value load current of a self-excited inverter that does not require decomposition of the current curve into a harmonic series and its subsequent summation.

METHODS. The effective inverter load current was calculated using the theory of residues.

RESULTS. The load current of a self-excited inverter calculated based on expressions obtained using the theory of residues allows to reduce the amount of computation and ensures high accuracy, which is confirmed by experimental studies.

Keywords: self-excited inverter; load current; theory of residues.

To cite this paper:

Trifonov BA, Sereda GE. Calculation of Load Current of Self-Excited Voltage Inverter by Harmonic Analysis. *Modern Transportation Systems and Technologies*. 2025;11(2):307–317. doi: 10.17816/transsyst683922

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее время характеризуется применением большого числа различных полупроводниковых преобразователей, осуществляющих преобразование электрической энергии постоянного тока в электрическую энергию переменного тока. [1–5].

Такая задача решается применением инверторных схем. Для надежной работы таких преобразователей требуется тщательный подбор элементов схемы, который в данный момент осуществляется применением численных методов расчета, которые требуют значительного машинного времени и дальнейшей экспериментальной проверки на опытных макетах.

Предлагается аналитический метод расчета с использованием гармонических рядов. При этом возникает проблема нахождения сумм коэффициентов гармонического ряда [6–11].

В предлагаемой работе сумма ряда находится с использованием теории вычетов, что позволяет значительно сократить получение результата (действующего значения тока нагрузки) [12–15].

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Рассмотрим работу однофазного мостового автономного инвертора напряжения на нагрузку активно-индуктивного характера. Ключевые элементы инвертора представляют собой полностью управляемые силовые полупроводниковые приборы (ГТО-тиристоры, транзисторы).

Процессы, происходящие в схеме, описываются уравнением (1), которое справедливо на интервале открытого состояния проводящей пары ключевых элементов, соответствующем половине периода T :

$$U = i_n R + \frac{di_n}{dt}, \quad (1)$$

где U – напряжение источника питания; R , L – сопротивление и индуктивность нагрузки; i_n – ток нагрузки.

Если в уравнении (1) параметры реального режима, относящиеся к цепи постоянного тока, с помощью коммутационной функции $\xi(t)$ привести к цепи переменного тока, то это уравнение приобретает вид, справедливый для любого момента времени:

$$\xi(t)U = i_n R + \frac{di_n}{dt}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) может быть представлено в виде гармонических рядов

$$i_n = \sum_k A_{1k} \cos k\omega t + \sum_k A_{2k} \sin k\omega t,$$

$$\frac{di_n}{dt} = \sum_k B_{1k} \cos k\omega t + \sum_k B_{2k} \sin k\omega t, \quad k = 1, 3, 5 \dots \quad (3)$$

После интегрирования выражения для коэффициентов ряда производной имеем

$$B_{1k} = \frac{4}{T} \left[-i_{n(T/2)} - i_{n(0)} \right] + k\omega A_{2k}, \quad (4)$$

$$B_{2k} = -k\omega A_{1k}. \quad (5)$$

Известно [1, 2], что $i_{n(T/2)} = -i_{n(0)}$ тогда

$$B_{1k} = k\omega A_{2k}.$$

Применительно к рассматриваемому случаю $U = \text{const}$, следовательно, гармонический ряд для $\xi(t)U$ будет иметь вид

$$\xi(t)U = \frac{4}{\pi} \sum_k \frac{U \sin k\omega t}{k}, \quad k = 1, 3, 5 \dots$$

По полученным выражениям для гармонических коэффициентов можно составить систему из двух уравнений:
для косинусных коэффициентов

$$0 = Lk\omega A_{2k} + A_{1k}; \quad (6)$$

для синусных коэффициентов

$$\frac{4}{\pi k} U = -k\omega L A_{1k} + A_{2k} R; \quad (7)$$

Совместное решение уравнений (6) и (7) дает выражения для коэффициентов соответствующего ряда тока нагрузки инвертора

$$A_{1k} = \frac{-4U\omega L}{\pi \left[R^2 + (k\omega L)^2 \right]}, \quad (8)$$

$$A_{2k} = \frac{4UR}{\pi k \left[R^2 + (k\omega L)^2 \right]}. \quad (9)$$

Действующее значение k -й гармоники тока нагрузки определяется выражением:

$$I_{nk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{1k}^2 + A_{2k}^2} = \frac{2\sqrt{2}U}{\pi} \sqrt{\frac{1}{k^2 \left[R^2 + (k\omega L)^2 \right]}}. \quad (10)$$

Для определения действующего значения тока нагрузки I_H необходимо определить сумму ряда:

$$\sum_k \frac{1}{k^2 \left[R^2 + (k\omega L)^2 \right]}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (11)$$

Прямого суммирования этого ряда по всем нечетным гармоникам можно избежать, если воспользоваться теорией вычетов, с помощью которой можно найти сумму ряда (11).

Введем вспомогательную функцию комплексного переменного z :

$$f(z) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi z}{2} \right),$$

$$f(z) = \left[(zR)^2 + z^4 (\omega L)^2 \right]^{-1}. \quad (12)$$

Согласно [13, 14] имеем равенство:

$$\sum_k f(k) = \frac{\pi}{4} \sum_k \operatorname{res} f(z) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi z}{2} \right), \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (13)$$

Определим вычеты вспомогательной функции $f(z) \operatorname{tg}(\pi z/2)$.

Корнями уравнения (12) являются

$$z_{1,2} = 0, \quad z_{3,4} = \pm j \frac{R}{\omega L}.$$

Тогда

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{\pi \left[2zR^2 + 4z^3 (z\omega L)^2 \right]}. \quad (14)$$

Подставляя значение корней z_3 и z_4 в (14), получим на основании (13) выражение для действующего значения тока нагрузки

$$I_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U}{R} \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\omega L}{R} \operatorname{th}\left(\frac{\pi R}{2\omega L}\right)}. \quad (15)$$

Кроме того, представляется возможным найти значение тока в момент коммутации ключевых элементов инвертора $i_{n(0)}$, для этого необходимо найти сумму ряда (8) косинусных коэффициентов.

Введем новую вспомогательную функцию комплексного переменного z :

$$f(z) = \frac{1}{\pi \left[R^2 + (k\omega L)^2 \right]}. \quad (16)$$

Для определения вычетов функции (16) найдем корни знаменателя:

$$z_{1,2} = \pm j \frac{R}{\omega L}. \quad (17)$$

И на основании равенства (13) найдем сумму ряда для косинусных коэффициентов и выражение для тока нагрузки в момент коммутации вентилей:

$$i_n(0) = \frac{U}{R} \operatorname{th}\left(\frac{\pi R}{2\omega L}\right). \quad (18)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Достоверность выражения (15) подтверждается весьма удовлетворительным совпадением результатов расчета по этому выражению с расчетами по гармоникам с использованием выражения (10) и вполне удовлетворительным совпадением с результатами эксперимента. Эксперимент был выполнен на лабораторном стенде при частоте коммутации вентилей инвертора $f=100$ Гц для различных значений сопротивления R и индуктивности L нагрузки. Кривые токов нагрузки, полученные экспериментально, представлены на Рис. 1. Результаты эксперимента и расчетов представлены на Рис. 2.

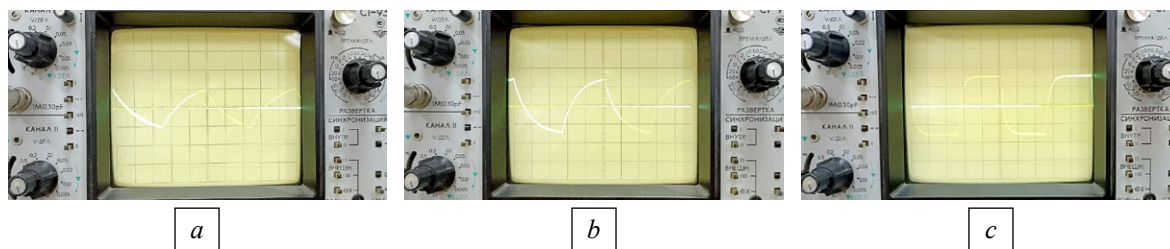


Рис. 1. Форма кривых тока нагрузки

однофазного мостового автономного инвертора напряжения:

$a - R=194 \text{ Ом}, L=0,397 \text{ Гн}; b - R=194 \text{ Ом}, L=0,2 \text{ Гн}; c - R=194 \text{ Ом}, L=0,051 \text{ Гн}$

Fig. 1. The shape of the load current curves of a single-phase bridge autonomous voltage inverter: $a - R=194 \text{ Ohm}, L=0.397 \text{ H}; b - R=194 \text{ Ohm}, L=0.2 \text{ H}; c - R=194 \text{ Ohm}, L=0.051 \text{ H}$

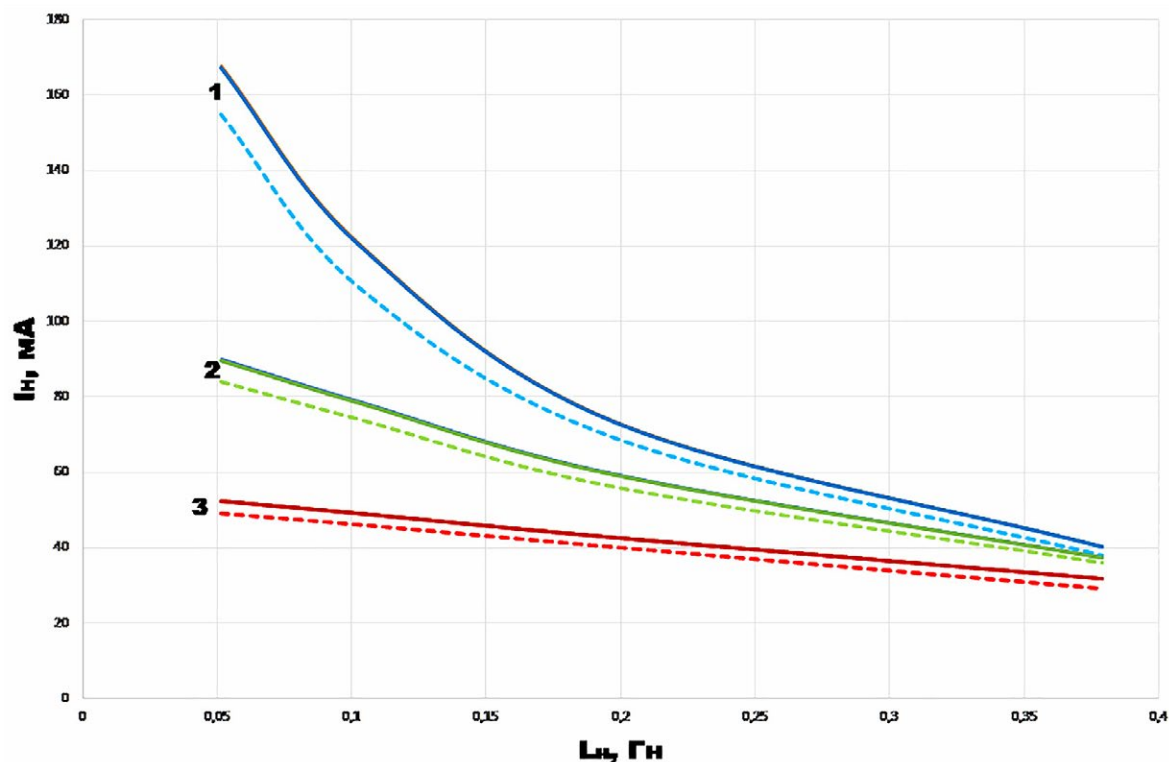


Рис. 2. Результаты экспериментального исследования и расчетов для действующего значения тока нагрузки (сплошные линии – расчет по гармоникам и выражению (15), штриховые линии – эксперимент): 1 – $R=47 \text{ Ом}$; 2 – $R=107 \text{ Ом}$; 3 – $R=194 \text{ Ом}$

Fig. 2. Results of the experimental study and calculations for the effective value of the load current (solid lines – calculation by harmonics and expression (15), dashed lines – experiment): 1 – $R=47 \text{ Ohm}$; 2 – $R=107 \text{ Ohm}$; 3 – $R=194 \text{ Ohm}$

ВЫВОДЫ

Рассмотрен способ вычисления действующего значения тока нагрузки автономного инвертора напряжения с использованием теории вычетов, не требующий разложения кривой тока в гармонический ряд и последующего его суммирования.

Использование теории вычетов значительно упрощает поиск конечного результата и сокращает объем вычислительной работы.

Справедливость полученных результатов подтверждена экспериментальными исследованиями опытного образца однофазного инвертора напряжения.

Авторы заявляют что:

1. У них нет конфликта интересов;
2. Настоящая статья не содержит каких-либо исследований с участием людей в качестве объектов исследований.

The authors state that:

1. They have no conflict of interest;
2. This article does not contain any studies involving human subjects.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бедфорд Б., Хофт Р. Теория автономных инверторов. М.: Энергия, 1969.
2. Бурков А.Т. Электроника и преобразовательная техника: Том 2: Электронная преобразовательная техника. Москва: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2015. EDN: XMTHSZ
3. Быльцева В.Д., Изварин М.Ю., Ким К.К. Системы автономного хода городского электрического транспорта // Инновационные транспортные системы и технологии. 2024. Т. 10, № 3. С. 300-319. doi: 10.17816/transsyst634812 EDN: SONMKY
4. Шаряков В.А., Никитин В.В., Евстафьев А.М., Колпахчян П.Г. К вопросу об оценке энергопотребления подвижным составом городского рельсового транспорта // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2024. Т. 67, № 4. С. 120-124. doi: 10.17213/0136-3360-2024-4-120-124 EDN: RQOTLC
5. Карабаджак И.Д., Никитин В.В. Энергообеспечение потребителей переменного тока от батареи водородных топливных элементов // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 2025. Т. 204, № 1. С. 13-19. EDN: ZMVOCQ
6. Трифонов Б.А., Никитин В.В., Середа Г.Е. Расчет начального напряжения на коммутирующем конденсаторе автономного инвертора. В кн.: Проблемы безопасности и эффективности технических систем: Сборник докладов конференции с международным участием, Санкт-Петербург, 15 мая 2024 года.

- Санкт-Петербург: Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 2024. С. 114-119. EDN: RWOMPG
7. Карабаджак И.Д., Никитин В.В. Варианты структуры автономной электроэнергетической системы с батареей водородных топливных элементов // Инновационные транспортные системы и технологии. 2024. Т. 10, № 1. С. 59-75. doi: 10.17816/transsyst624890 EDN: VJKSUO
 8. Теличенко С.А., Никитин В.В., Колпахчян П.Г. и др. Электромагнитные процессы в универсальном полупроводниковом преобразователе для транспортных бортовых систем хранения электрической энергии // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2023. Т. 66, № 4. С. 118-127. doi: 10.17213/0136-3360-2023-4-118-127 EDN: CVYVJX
 9. Мазнев А.С., Калинина А.А., Волов А.В. и др. Улучшение регулировочных свойств электропоездов постоянного тока с импульсными преобразователями // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2022. Т. 19, № 1. С. 75-81. doi: 10.20295/1815-588X-2022-19-1-75-81 EDN: NGPPUF
 10. Петрушин А.Д., Титова Т.С., Никитин В.В., Мазнев А.С. Оптимальное частотное управление асинхронными тяговыми электродвигателями электропоезда // Электротехника. 2021. № 10. С. 10-14. EDN: DZIIEN
 11. Li X., Li D., Chang G., et al. High-Voltage Hybrid IGBT Power Modules for Miniaturization of Rolling Stock Traction Inverters. // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2022. Vol. 69, N. 2. P. 1266-1275. EDN: HGQHGO doi: 10.1109/tie.2021.3059544
 12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
 13. Ключко В.К. Прикладная математика для инженеров. М.: КУРС, 2025. EDN: OZNHOH
 14. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. EDN: WKDFSB
 15. Волковоский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного тока: учеб. пособие для студентов вузов. М.: Физматлит, 2004. EDN: QJNAOH

REFERENCES

1. Bedford B, Hoft R. *Theory of autonomous inverters*. Moscow: Energy, 1969.
2. Burkov A.T. *Electronics and Converter Technology: Vol. 2: Electronic Converter Technology*. Moscow: Educational and Methodological Center for Education in Railway Transport; 2015. EDN: XMTHSZ
3. Byltseva VD, Izvarin MYu, Kim KK. Systems of autonomous running of urban electric transport. *Modern Transportation Systems and Technologies*. 2024;10(3):300-319. doi: 10.17816/transsyst634812
4. Sharyakov VA, Nikitin VV, Evstaf'ev AM, Kolpakhchyan PG. On the question of assessing energy consumption by the rolling stock of urban rail transport. *Russian Electromechanics*. 2024;67(4):120-124. doi: 10.17213/0136-3360-2024-4-120-124 EDN: RQOTLC

5. Karabadzhak ID, Nikitin VV. Power supply for ac consumers from a hydrogen fuel cell battery. *Electromechanical matters*. VNIIEM studies. 2025;204(1):13-19. EDN: ZMVOCQ
6. Trifonov BA, Nikitin VV, Sereda GE. Calculation of the initial voltage on the switching capacitor of an autonomous current inverter. In: *Problems of safety and efficiency of technical systems: Collection of reports from a conference with international participation, St. Petersburg, May 15, 2024*. St. Petersburg: Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University; 2024:114-119. EDN: RWOMPG
7. Karabadzhak ID, Nikitin VV. Options for the structure of an autonomous electric power system with a battery of hydrogen fuel cells. *Modern Transportation Systems and Technologies*. 2024;10(1):59-75. doi: 10.17816/transsyst624890
8. Telichenko SA, Nikitin VV, Kolpakhchyan PG. Electromagnetic processes in a universal semiconductor converter for transport on-board electrical energy storage systems. *Russian Electromechanics*. 2023;66(4):118-127. doi: 10.17213/0136-3360-2023-4-118-127 EDN: CVYVJX
9. Maznev AS, Kalinina AA, Volov AV, et al. Improvement of regulating properties of dc electric trains with pulse converters. *Proceedings of Petersburg Transport University*. 2022;19(1):75-81. doi: 10.20295/1815-588X-2022-19-1-75-81 EDN: NGPPUF
10. Petrushin AD, Titova TS, Nikitin VV, Maznev AS. Optimal Frequency Control of Electric-Train Asynchronous Traction Motors. *Russian Electrical Engineering*. 2021;92(10):550-554. doi: 10.3103/S106837122110014X EDN: HQFKPR
11. Li X, Li D, Chang G, et al. High-Voltage Hybrid IGBT Power Modules for Miniaturization of Rolling Stock Traction Inverters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2022;69(2):1266-1275. doi: 10.1109/tie.2021.3059544 EDN: HGQHGO
12. Lavrentev MA, Shabat BV. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Moscow: Science; 1973.
13. Klochko VK. *Applied Mathematics for Engineers*. Moscow: KURS; 2025. EDN: OZNHOG
14. Morozova VD. *Theory of functions of a complex variable*. Moscow: Bauman Moscow State Technical University; 2008. EDN: WKDFSB
15. Volkovyskij LI, Lunc GL, Aramanovich IG. *Collection of problems on the theory of functions of a complex variable*. Moscow: Fizmatlit; 2004. EDN: QJNAOH

Сведения об авторах

Трифонов Борис Алексеевич, к.т.н., доцент;
eLibrarySPIN: 2262-9246; ORSID: 0000-0002-5816-3473;
E-mail: trifoboba45@gmail.com

Середа Геннадий Евгеньевич, к.т.н., доцент;
eLibrarySPIN: 9682-8744; ORSID: 0000-0003-0754-6682;
E-mail: gennady.sereda@mail.ru

Information about the authors:

Boris A Trifonov, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor;

eLibrarySPIN: 2262-9246; ORSID: 0000-0002-5816-3473;

E-mail: trifoboba45@gmail.com

Gennady E. Sereda, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor;

eLibrarySPIN: 9682-8744; ORSID: 0000-0003-0754-6682;

E-mail: gennady.sereda@mail.ru