

Рубрика 2. НАУЧНЫЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

Направление – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК [UDC] 539.374

DOI 10.17816/transsyst202391122-134

© Е.А. Лямина<sup>1</sup>, О.В. Новожилова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

<sup>2</sup> Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана  
(Москва, Россия)

## ДИЗАЙН РАВНОПРОЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

**Обоснование:** Вращающиеся диски, например маховики, являются неотъемлемой частью двигателей, что требует развития теоретических методов анализа и дизайна таких дисков.

**Цель:** Определение профиля равнопрочного вращающегося диска.

**Материалы и методы:** Методы математической теории упругости и пластичности.

**Результаты:** Методика определения профиля равнопрочного вращающегося диска, подчиняющегося условию пластичности Мизеса, и ее применение.

**Заключение:** Разработанная методика может быть использована для дизайна равнопрочных вращающихся дисков, подверженных действию различных комбинаций величин давления на внешнем и внутреннем радиусах. Методика может быть распространена на более общие условия пластичности.

**Ключевые слова:** равнопрочный диск, вращающийся диск, аналитическое решение.

Rubric 2. SCIENTIFIC AND PRACTICAL DEVELOPMENTS

Field – Mathematical modeling, numerical methods and software packages

© Е.А. Lyamina<sup>1</sup>, O.V. Novozhilova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University  
(Moscow, Russia)

## DESIGN OF EQUI-STRENGTH ROTATING DISK

**Background:** Rotating disks, such as flywheels, are an important machine part of engines, which requires the development of the theoretical methods of their analysis and design.

**Aim:** Determination of the profile of equi-strength rotating disks.

**Materials and Methods:** Methods of the mathematical theory of elasticity and plasticity

**Results:** Methodology for determining the profile of equi-strength rotating disks obeying the von Mises yield criterion and its application

**Conclusion:** The methodology developed can be used to design equi-strength rotating disks subject to various combinations of internal and external pressures. It can be extended to more general yield criteria.

**Key words:** equi-strength disk, rotating disk, analytical solution.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вращающиеся диски находят широкое применение в различных отраслях промышленности [1–6]. Характерным примером их использования в транспортном машиностроении являются маховики. В связи с этим, развитию теоретических методов анализа и дизайна вращающихся дисков посвящено большое количество исследований.

Определение осесимметричного напряженно-деформированного состояния для дисков постоянной толщины для различных условий пластичности выполнено в [7]. Однако, в инженерных приложениях часто применяются диски переменной толщины. В большинстве случаев, изменение толщины диска вдоль его радиуса задано. Например, в [8–12] принимается, что изменение толщины подчиняется экспоненциальному закону. В [9] и [10] также используется степенная функция для описания профиля диска. Однако определение профиля равнопрочного диска предполагает, что зависимость толщины диска от радиуса должна быть получена из решения. Общие проблемы дизайна дисков изложены в [11]. Одно из первых решений по определению профиля равнопрочного вращающегося диска без учета давления на радиусах получено в [12]. Дизайн неоднородных равнопрочных дисков, подверженных внешнему и внутреннему давлению, выполнен в [13, 14]. В обеих работах предполагается справедливым условие пластичности Треска. В публикуемой работе разрабатывается и применяется методика определения профиля равнопрочного вращающегося диска, подверженного внутреннему и внешнему давлению. Материал диска подчиняется условию пластичности Мизеса. Решение получено в элементарных функциях. Этому способствует замена радиальной координаты некоторой другой переменной. Такие замены успешно применялись при решении сферически симметричных краевых задач [15–17]. Решение получено в условиях плосконапряженного состояния. Приемлемость этого условия зависит от скорости изменения толщины диска вдоль радиуса. Очевидно, что однозначная количественная оценка применимости условий плосконапряженного состояния невозможна. Предлагаемая методика включает оценку применимости условий плосконапряженного состояния исходя из принятых в литературе критериев [18, 19].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полый вращающийся диск внутреннего радиуса  $a_0$  и внешнего радиуса  $b_0$  нагружен равномерными давлениями  $P_a$  и  $P_b$  по внутреннему и внешнему радиусам, соответственно (Рис.1). Угловая скорость диска равна  $\omega$ . Угловым ускорением пренебрегаем. Материал диска подчиняется закону Гука и условию пластичности Мизеса. Краевая задача является осесимметричной. Поэтому, целесообразно ввести цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии диска. Толщина диска варьируется в радиальном направлении. Однако, предполагается, что плосконапряженное состояние является приемлемой аппроксимацией.

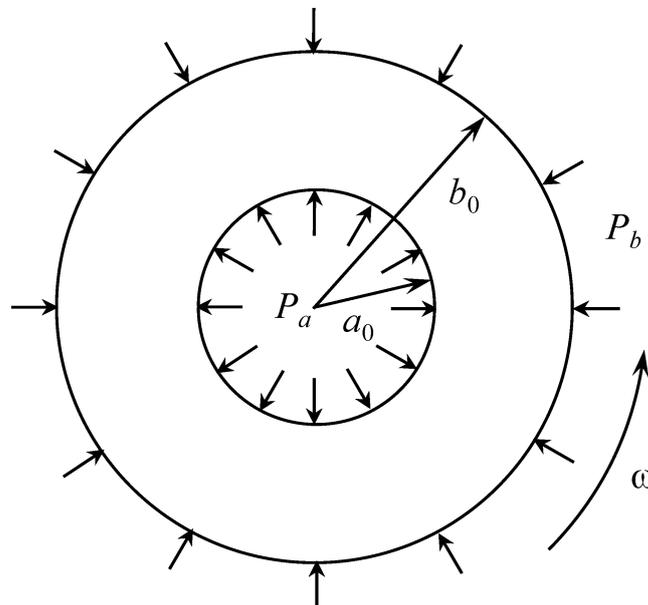


Рис. 1. Вращающийся диск, нагруженный внутренним и внешним давлением

Компоненты тензора напряжения в цилиндрической системе координат обозначим  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$ . Эти напряжения являются главными. Поэтому,  $\sigma_z = 0$  в условиях плосконапряженного состояния. Тогда, закон Гука принимает вид

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_\theta, \quad E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_r, \quad E\varepsilon_z = -\nu(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_z$  - компоненты тензора деформации в цилиндрической системе координат,  $E$  - модуль Юнга и  $\nu$  - коэффициент Пуассона. Условие пластичности Мизеса в рассматриваемом случае имеет форму

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_0^2. \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_0$  - предел пластичности при одноосном растяжении.

Удобно ввести следующие безразмерные величины:

$$s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad s_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}, \quad \rho = \frac{r}{b_0}, \quad a = \frac{a_0}{b_0}, \quad p_a = \frac{P_a}{\sigma_0}, \quad p_b = \frac{P_b}{\sigma_0}, \quad (3)$$

$$k = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \Omega = \frac{\nu \omega^2 b_0^2}{\sigma_0}.$$

Здесь  $\nu$  - плотность материала.

Используя (3), первые два уравнения в (1) преобразуются к виду

$$\varepsilon_r = k(s_r - \nu s_\theta), \quad \varepsilon_\theta = k(s_\theta - \nu s_r), \quad (4)$$

а уравнение (2) к виду

$$s_r^2 + s_\theta^2 - s_r s_\theta = 1. \quad (5)$$

Учитывая (3), единственное уравнение движения, которое не удовлетворяется автоматически, имеет форму

$$\frac{d(h\rho s_r)}{d\rho} - h(s_\theta - \rho^2 \Omega) = 0. \quad (6)$$

Здесь  $h$  – толщина диска. В решении удобно использовать величину:

$$t = \ln\left(\frac{h}{h_b}\right). \quad (7)$$

Здесь  $h_b$  - толщина диска при  $r = b_0$  (или  $\rho = 1$ ). Тогда уравнение (6) примет вид

$$\rho \frac{dt}{d\rho} + \rho \frac{ds_r}{d\rho} + s_r - s_\theta + \rho^2 \Omega = 0. \quad (8)$$

Уравнение совместности деформаций в рассматриваемом случае имеет форму:

$$\frac{d(\rho \varepsilon_0)}{d\rho} = \varepsilon_r. \quad (9)$$

Используя (3) и (7), граничные условия могут быть сформулированы как

$$s_r = -p_b \quad (10)$$

при  $\rho = 1$  или  $t = 0$  и

$$s_r = -p_a \quad (11)$$

при  $\rho = a$  или  $t = t_a = \ln(h_a/h_b)$ . Здесь  $h_a$  - толщина диска при  $r = a_0$  (или  $\rho = a$ ).

Задача дизайна состоит в нахождении профиля равнопрочного диска.

### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В РАВНОПРОЧНОМ ДИСКЕ

#### 3.1 Общее решение

В равнопрочном диске условие пластичности выполняется во всем диске. Это условие удовлетворяется стандартной подстановкой:

$$s_r = -\frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad s_\theta = -\frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} - \cos \psi. \quad (12)$$

Здесь  $\psi$  - новая неизвестная функция  $\rho$ . При этом,  $\psi = \psi_a$  при  $\rho = a$  и  $\psi = \psi_b$  при  $\rho = 1$ . Подставляя (12) в (8), найдем

$$\rho \frac{dt}{d\rho} - \frac{2\rho \cos \psi}{\sqrt{3}} \frac{d\psi}{d\rho} + \cos \psi - \frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} + \rho^2 \Omega = 0. \quad (13)$$

Исключая  $s_r$  и  $s_\theta$  в (4) с помощью (12) и подставляя полученные соотношений в (9), приходим к уравнению для определения  $\psi$  в виде

$$\left[ \sin \psi - \frac{(1-2\nu) \cos \psi}{\sqrt{3}} \right] \frac{\rho d\psi}{d\rho} = (1+\nu) \left( \cos \psi - \frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} \right). \quad (14)$$

Это уравнение позволяет выразить производную  $d\psi/d\rho$  как функцию  $\rho$ . Исключая эту производную в (13), получим:

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{(\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi)^2}{\rho [\sqrt{3} \sin \psi - (1 - 2\nu) \cos \psi]} - \rho \Omega. \quad (15)$$

В этом уравнении можно перейти от дифференцирования по  $\rho$  к дифференцированию по  $\psi$  с помощью (14). Тогда,

$$\frac{dt}{d\psi} (1 + \nu) = \sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi - \rho^2 \Omega \frac{[\sqrt{3} \sin \psi - (1 - 2\nu) \cos \psi]}{(\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi)}. \quad (16)$$

Уравнения (14) и (16) могут быть решены последовательно. В частности, решение уравнения (14), удовлетворяющее условию  $\psi = \psi_b$  при  $\rho = 1$ , имеет вид:

$$\rho = \sqrt{\frac{\sqrt{3} \cos \psi_b - \sin \psi_b}{\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi}} \exp \left[ \frac{\sqrt{3}(1 - \nu)}{2(1 + \nu)} (\psi_b - \psi) \right]. \quad (17)$$

Исключая  $\rho$  в уравнении (16) с помощью (17), найдем

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\psi} (1 + \nu) = \sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi - \\ - \Omega \frac{(\sqrt{3} \cos \psi_b - \sin \psi_b) [\sqrt{3} \sin \psi - (1 - 2\nu) \cos \psi]}{(\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $t = 0$  при  $\psi = \psi_b$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} t = \frac{(\sqrt{3} \sin \psi + \cos \psi - \sqrt{3} \sin \psi_b - \cos \psi_b)}{(1 + \nu)} - \\ - \Omega \left\langle \frac{\sqrt{3}(1 - \nu)}{2(1 + \nu)} (\sqrt{3} \cos \psi_b - \sin \psi_b) \left\{ \operatorname{arth} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\psi_b}{2} \right) \right) \right] - \operatorname{arth} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\psi}{2} \right) \right) \right] \right\} + \right. \\ \left. \frac{(\sqrt{3} \cos \psi_b - \sin \psi_b)}{2(\sqrt{3} \cos \psi - \sin \psi)} - \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

Это решение совместно с (7) и (17) определяет зависимость толщины равнопрочного диска от радиуса в параметрической форме. Распределение

компонент тензора напряжения по радиусу можно найти из (12) и (17) также в параметрической форме. Отсюда следует, что нельзя произвольно задать  $p_b$  и  $p_a$ , входящие в (10) и (11).

### 3.2. Особое решение

Уравнение (14) имеет особые решения

$$\psi = \psi_s = \frac{\pi}{3} \quad \text{и} \quad \psi = \psi_s = -\frac{2\pi}{3}. \quad (20)$$

В этих случаях уравнение (15) сводится к

$$\frac{dt}{d\rho} + \rho\Omega = 0. \quad (21)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $t=0$  при  $\rho=1$ , имеет вид

$$t = \frac{\Omega}{2}(1-\rho^2). \quad (22)$$

Из (12) и (20) следует, что компоненты тензора напряжения постоянны во всем диске. В частности, из (10) - (12) получаем

$$p_a = p_b = \pm 1. \quad (23)$$

Толщина равнопрочного диска определяется из (7) и (22) как

$$h = h_b \exp\left[\frac{\Omega}{2}(1-\rho^2)\right]. \quad (24)$$

## 4. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ РЕШЕНИЯ

Предположение о плосконапряженном состоянии приемлемо, если только толщина диска изменяется достаточно плавно. Это условие можно сформулировать как

$$\left|\frac{dh}{dr}\right| \leq \delta, \quad (25)$$

где  $\delta$  - заданное число. Используя (3) и (7), условие (25) можно представить в виде

$$\left| \frac{dh}{h_b d\rho} \right| \leq \delta \frac{b_0}{h_b} = \Delta \quad \text{или} \quad \left| \frac{dt}{d\rho} \right| e^t \leq \delta \frac{b_0}{h_b} = \Delta. \quad (26)$$

Обычно принимается, что величина  $\Delta$  может быть равна нескольким десяткам [18, 19].

Рассмотрим особое решение. Подставляя (24) в первое уравнение в (26), получим

$$\Omega \rho \exp \left[ \frac{\Omega}{2} (1 - \rho^2) \right] \leq \Delta. \quad (27)$$

Левая сторона этого неравенства достигает максимума при  $\rho = 1/\sqrt{\Omega}$ . Таким образом, максимально возможные значения  $\Omega$  определяются из (27) как

$$\sqrt{\Omega_m} \exp \left[ \frac{1}{2} (\Omega_m - 1) \right] = \Delta \quad (28)$$

при  $1 \leq \Omega_m \leq 1/a^2$ ,

$$\Omega_m = \Delta \quad (29)$$

при  $\Omega_m < 1$ ,

$$a \Omega_m \exp \left[ \frac{\Omega_m}{2} (1 - a^2) \right] = \Delta \quad (30)$$

при  $\Omega_m > 1/a^2$ . Как отмечено выше, допустимые значения величины  $\Delta$  значительно превышают единицу. В связи с этим, решение (29) не имеет существенного значения для приложений. Иллюстрация решений (28) и (30) представлена на Рис. 2 для нескольких значений  $\Delta$ .

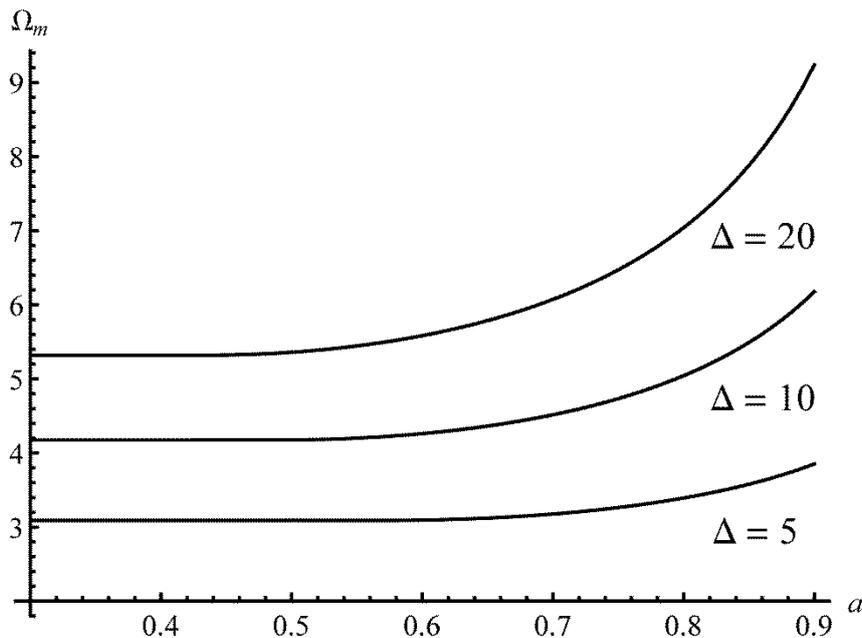


Рис. 2. Иллюстрация условия применимости особого решения

Рассмотрим общее решение. Производная  $dt/dr$  определяется как функция  $\psi$  с помощью (15) и (17). Величина  $t$  определяется из (19) тоже как функция  $\psi$ . Подставляя эти выражения во вторую формулу в (26), можно проверить выполнение неравенства в любой точке диска.

## 5. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ДИЗАЙН ДИСКА

Уравнение (17) позволяет найти связь между  $\psi_a$  и  $\psi_b$ . При этом, необходимо иметь ввиду особое решение (20) и величины

$$\psi = \psi_c^{(1)} = \arctg \frac{(1-2\nu)}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \psi = \psi_c^{(2)} = \arctg \frac{(1-2\nu)}{\sqrt{3}} - \pi, \quad (31)$$

при которых коэффициент при производной в (14) обращается в ноль. Обе величины,  $\psi_a$  и  $\psi_b$ , должны находиться внутри одного из следующих интервалов:  $(\psi_c^{(2)}, -2\pi/3)$ ,  $(-2\pi/3, \psi_c^{(1)})$ ,  $(\psi_c^{(1)}, \pi/3)$ ,  $(\pi/3, \psi_c^{(1)} + \pi)$ . Знак производной  $d\psi/dr$  в каждом из этих интервалов можно найти из уравнения (14). Этот знак позволяет установить какое неравенство,  $\psi_a > \psi_b$  или  $\psi_a < \psi_b$ , выполняется в каждом интервале. Общая структура решения показана на Рис. 3.

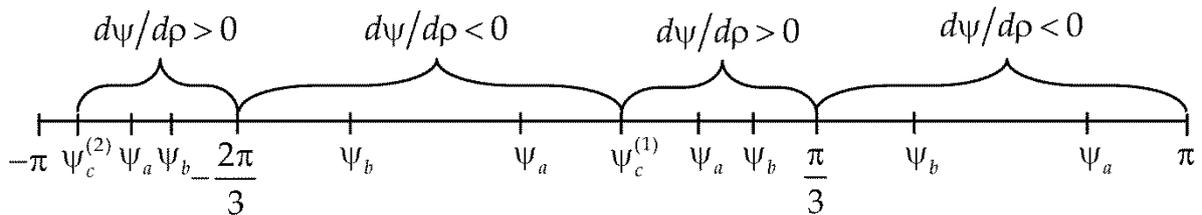
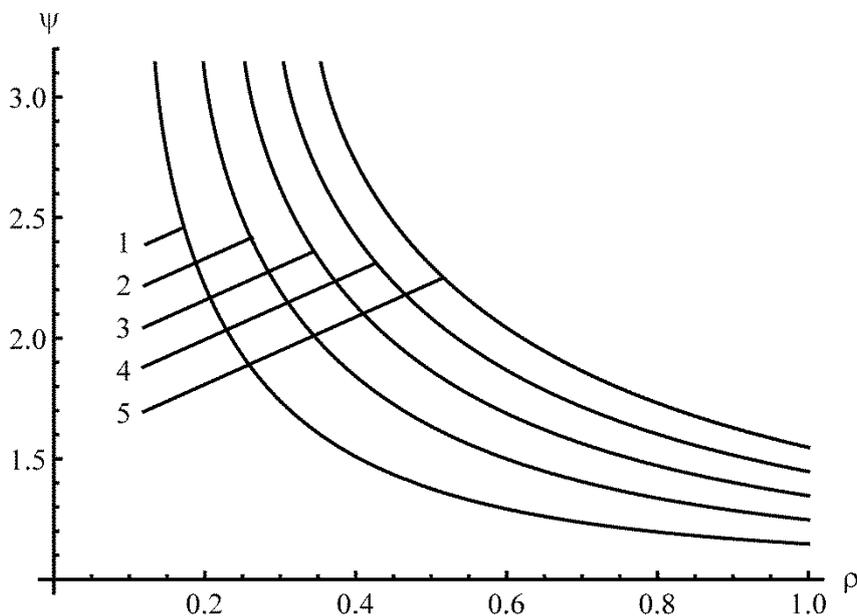


Рис. 3. Общая структура решения уравнения (14)

В качестве примера, на Рис. 4 построены зависимости  $\psi$  от  $\rho$  для нескольких значений  $\psi_b$  из интервала  $(\pi/3, \psi_c^{(1)} + \pi)$ . На этом рисунке кривая 1 соответствует  $\psi_b = \pi/3 + .1$ , кривая 2 -  $\psi_b = \pi/3 + .2$ , кривая 3 -  $\psi_b = \pi/3 + .3$ , кривая 4 -  $\psi_b = \pi/3 + .4$ , кривая 5 -  $\psi_b = \pi/3 + .5$ . Эти и все последующие расчеты выполнены при  $\nu = 0.3$ . С помощью этих расчетов можно определить требуемое давление на внешнем радиусе при заданных давлении на внутреннем радиусе и величине  $a$ . Пусть внутренний радиус свободен от напряжений. Тогда,  $\psi_a = \pi$ . Соответствующая величина  $\psi_b$  определяется из (17) при заданной величине  $a$ . Давление на внешнем радиусе вычисляется по формуле в (12). На рисунке 5 показана зависимость этого давления от  $a$ . Предположим, что требуется выполнить дизайн диска при  $a = 1/2$ .

Рис. 4. Радиальное распределение значения угла  $\psi$ 

Тогда из решения на Рис. 5 следует, что  $\psi_b = 1.852$  и  $s_b = -1.11$ . Профиль диска вычисляется из (17) и (19). Этот профиль показан на Рис.6 при  $\Omega = 5$ . На Рис.7 показано распределение величины  $q = |dt/d\rho|e^t$ , входящей в (26).

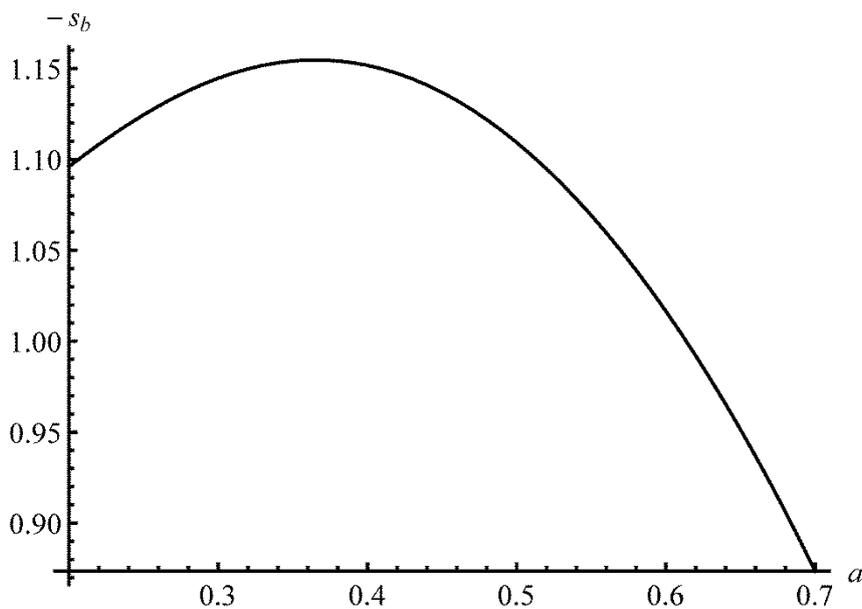
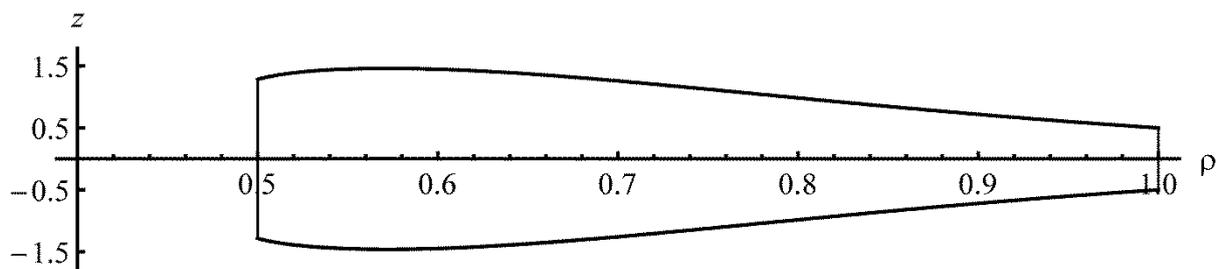
Рис. 5. Зависимость давления на внешнем радиусе от величины  $a$ 

Рис. 6. Профиль равнопрочного диска

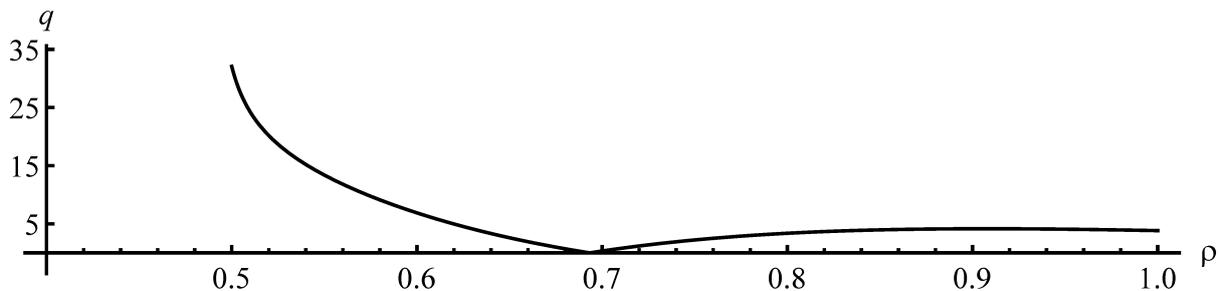


Рис. 7. Иллюстрация условия применимости решения

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика определения профиля равнопрочного вращающегося диска, материал которого подчиняется условию пластичности Мизеса. Решение получено в элементарных функциях, что оказалось возможным благодаря выбору вспомогательной переменной  $\psi$  в качестве независимой переменной вместо радиальной координаты. Методика включает проверку приемлемости предположения о

плосконапряженном состоянии. Приводится пример расчета профиля равнопрочного вращающегося диска.

Разработанная теория может быть использована для дизайна маховиков, широко применяемых в транспортном машиностроении.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00335).

### Авторы заявляют что:

1. У них нет конфликта интересов;
2. Настоящая статья не содержит каких-либо исследований с участием людей в качестве объектов исследований.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК / References

1. Genta G, Bassani D. Use of Genetic Algorithms For the Design of Rotors. *Meccanica*. 1995;30:707–717. doi: 10.1007/BF00986575
2. Parmaksizog˘lu C, Güven U. Plastic Stress Distribution in a Rotating Disk with Rigid Inclusion Under a Radial Temperature Gradient. *Mechanics of Structures and Machines: An International Journal*. 1998;26:19-20. doi: 10.1080/08905459808945417
3. Orcan Y, Eraslan AN. Elastic–Plastic Stresses in Linearly Hardening Rotating Solid Disks of Variable Thickness. *Mechanics Research Communications*. 2002;29(4):269–281. doi: 10.1016/S0093-6413(02)00261-6.
4. Eraslan AN. Stress Distributions In Elastic-Plastic Rotating Disks with Elliptical Thickness Profiles Using Tresca and Von Mises Criteria. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005;85:252-266. doi: 10.1002/zamm.200210177
5. Jalali MH, Jalali MR. Stress Analysis of Rotating Functionally Graded Polar Orthotropic Disk Under Thermomechanical Loading. *Journal of Vibroengineering*. 2020;22(3):640–656. doi: 10.21595/jve.2019.20575
6. Сёмка Э.В. Качественный и количественный анализ упругопластического состояния вращающегося тонкого диска // Вестник Инженерной школы ДВФУ. – 2022. – №4(53). – С. 3–12. [Syomka EV. Qualitative and quantitative analysis of the elastoplastic state of a rotating thin disk. *Far Eastern Federal University: School of Engineering Bulletin*. 2022;4(53):3-12. (In Russ).] Ссылка активна на: 18.03.2023. Доступно по: <https://journals.dvfu.ru/vis/article/view/388>
7. Alexandrov S. Elastic/plastic discs under plane stress conditions. Springer, 2015. doi: 10.1007/978-3-319-14580-8
8. Paul SK, Sahni M. Stress Analysis of Functionally Graded Disk with Exponentially Varying Thickness Using Iterative Method. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. 2021;16:232-244. doi: 10.37394/232011.2021.16.26
9. Sharma D, Kaur R, Sharma H. Investigation of Thermo-Elastic Characteristics in Functionally Graded Rotating Disk Using Finite Element Method. *Nonlinear Engineering*. 2021;10:312-322. doi: 10.1515/nleng-2021-0025
10. Madan R, Bhowmick S. Limit Elastic Analysis of Functionally Graded Rotating Disks Under Thermo-Mechanical Loading. *Int J Appl Mech*. 2021;13:Article 2150033. doi: 10.1142/S1758825121500332

11. Seireg A, Surana KS. Optimum Design of Rotating Disks. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*. 1970;92(1):1-10. doi: 10.1115/1.3427709
12. Gontarovskii VP, Chebaevskii BP. Profile design of uniform-strength disk by the Mises strength rule. *Strength of Materials*. 1973;5(10):1257-1259. doi: 10.1007/BF01129410
13. Hein K, Heinloo M. The Design of Nonhomogeneous Equi-Strength Annular Discs of Variable Thickness Under Internal And External Pressures. *Int J Solids Struct*. 1990;26(5/6):617-630. doi: 10.1016/0020-7683(90)90033-R
14. Gau CY, Manoochchri S. Optimal Design of a Nonhomogeneous Annular Disk Under Pressure Loadings. *ASME Journal of Mechanical Design*. 1994;116:989-996. doi: 10.1115/1.2919509
15. Durban D, Baruch M. Analysis Of an Elasto-Plastic Thick Walled Sphere Loaded By Internal and External Pressure. *Int J Nonlinear Mech*. 1977;12: 9-21. doi: 10.1016/0020-7462(77)90012-9
16. Alexandrov S, Pirumov A, Jeng YR. Expansion/Contraction of a Spherical Elastic/Plastic Shell Revisited. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2015; 27: 483-94. doi: 10.1007/s00161-014-0365-6
17. Alexandrov S, Jeng YR. An Elastic/Plastic Solution for a Hollow Sphere Subject to Thermo-Mechanical Loading Considering Temperature Dependent Material Properties. *Int J Solids Struct*. 2020;200-201:23-33. doi: :10.1016/j.ijsolstr.2020.03.027
18. Bayat M, Saleem M, Sahari BB, Hamouda AMS, Mahdi E. Mechanical and Thermal Stresses in A Functionally Graded Rotating Disk with Variable Thickness Due to Radially Symmetry Loads. *Int J Pres Ves Pip*. 2009;86:357-72. doi: 10.1016/j.ijpvp.2008.12.006
19. Vivio F, Vullo V, Cifani P. Theoretical Stress Analysis of Rotating Hyperbolic Disk Without Singularities Subjected to Thermal Load. *Journal of Thermal Stresses*. 2014;37:117-36. doi: 10.1080/01495739.2013.839526

**Сведения об авторах:**

**Лямина Елена Алексеевна**, к.ф.-м.н.;  
eLibrary SPIN: 6801-0244; ORCID: 0000-0002-7319-8703;  
E-mail: lyamina@inbox.ru

**Новожилова Ольга Валерьевна**, к.ф.-м.н.;  
eLibrary SPIN: 8995-7637; ORCID: 0000-0002-9361-0478;  
E-mail: helgam@bk.ru

**Information about the authors:**

**Elena A. Lyamina**, PhD, associated professor;  
eLibrary SPIN: 6801-0244; ORCID: 0000-0002-7319-8703;  
E-mail: lyamina@inbox.ru

**Olga V. Novozhilova**, PhD;  
eLibrary SPIN: 8995-7637; ORCID: 0000-0002-9361-0478;  
E-mail: helgam@bk.ru

**Цитировать:**

Лямина Е.А., Новожилова О.В. Дизайн равнопрочного вращающегося диска // Инновационные транспортные системы и технологии. – 2023. – Т. 9. – № 1. – С. 122–134. doi: 10.17816/transsyst202391122-134

**To cite this article:**

Lyamina EA, Novozhilova OG. Design of equi-strength rotating disk. *Modern Transportation Systems and Technologies*. 2023;9(1):122-134. doi: 10.17816/transsyst202391122-134